



BIBLIOTHECA  
UNIV. JAGELL.  
CRACOVENSIS

kat komp.  
56292

I

2

Mag. St. Dr.

P. Dr.

БИБЛИОТЕКИ



Виленская Публичная  
БИБЛИОТЕКА.

руйского Училища.

1884. VI. 6.

*N<sup>o</sup> 658 - 11.*

*Исх. 7  
Дет. 7*



56292

*I*



*Artem. 1142 1/2*

*Zł.*

# GEOMETRYA

D L A

SZKOŁ NARODOWYCH.

---

C Z E S C II.

---

---

*Cena oprawy w papier Zł.*

---

W Drukarni Nadwornej J.K. Mei  
Roku 1781.

*Przez*

*1146*

*JACKSON*

Dzieło: *Geometrya*, ułożone przez J.P. Lhuillier Obywatela Genewskiego, w Towarzystwo Nauk w tymże Mieście ustanowione policzonego, które za ogłoszonym w Polsce, i obcych krajach Uezonych do pisanja wezwaniem, z pomiędzy innych, potwierdzenie i nadgodę odebrało, od Towarzystwa do Ksiąg Elementarnych rozstrząśnione, a przez J. X. Gawrońskiego Kanonika Koadjutora Krakowskiego Lektora, J.K. Mei i w tymże Towarzystwie zasiadającego, na Polski język z Francuskiego przełożone, Szkołom Narodowym do użycia podług przepisów naszych podajemy. w Warszawie dnia 30. Października Roku 1780.

562925

IGNACY Xżę MASSALSKI Kup Wil. Prezy:  
 MICHAŁ Xżę PONIATOWSKI Kup Płocki.  
 AUGUST Xżę SUŁKOWSKI Wwda Kaliski.  
 JĘDRZEY MOKRONOSKI Wwda Mazow:  
 JACEK MAŁACHOWSKI Podkan: Koro:  
 JOACHYM CHREPTOWICZ Podkan: W.X.L.  
 MICHAŁ MNISZECH Marszałek Nadwor: Lit.  
 IGNACY POTOCKI Pifarz W.W.X.L.  
 ADAM Xżę CZARTORYSKI Gene: Ziem. Pod:  
 STANISŁAW Xżę PONIATOWSKI Ge: Lieut.  
 W.K.  
 FRANCISZEK BIELINSKI Stta Czerski  
 ANDRZEY ZAMOYSKI Kaw: Or. Orła Biał:





ZBIOR RZECZY ZAWARTYCH W RO-  
ZDZIAŁACH TEY CZĘSCI GEOME-  
TRYI.

WSTĘP - - - - - Karta 1

ROZDZIAŁ I.

O położeniu tak Linii, iak i Pła-  
szczyzn iednych, względem drugich. 14

ROZDZIAŁ II.

O Kątach bryłowych - - - - - 40

*Przygotowanie do Rozdziałów  
następujących.*

O podniesieniu liczby, do iey  
Sześciann, albo *Kubusa*, i o wycią-  
gnięciu Pierwiastku Sześciennego,  
albo Kubieznego. - - - - - 60

ROZDZIAŁ III.

O Równoległościanach prosto-  
kątnych - - - - - 82

ROZDZIAŁ IV.

O Równoległościanach nie pro-  
stokątnych - - - - - 107

ROZDZIAŁ V.

O Graniastosłupach - - - - - 124

ROZDZIAŁ VI.

O Piramidach, albo Ostrosłupach  
lub Ostrogranach - - - - - 132

ROZDZIAŁ VII.

O Walcach - - - - - 163  
(a2) RO-

ROZDZIAŁ VIII.	
O Ostrokregach	174
ROZDZIAŁ IX.	
O Kuli	194
ROZDZIAŁ X.	
O Bryłach podobnych	216

### ZBIOR SŁOW POLSKICH,

Albo nowych, albo mniej znanych, użytych w  
tey Części Geometrii, z przydanemi o bok sto-  
wami Łacińskimi, też samo w używaniu Ma-  
tematyków znaczącemi.

Biegón. *Polus*  
 Bryła. *Solidum*.  
 Bryłowatość. *Soliditas*.  
 Bytność. *Existentia*.  
 Ciągło. *Continuè*.  
 Ciągły. *Continuus*.  
 Czworokątny. *Quadrangularis*.  
 Czworościan. *Tetradèdron*.  
 Dwóddzielny. *Subduplicatus*  
 Dwómnożny. *Duplicatus*.  
 Dwómnożyć. *Duplicare*.  
 Dwódziestościan. *Icosèdron*.  
 Dwónastościan. *Dodecèdron*  
 Graniałostłup. *Prisma*  
 Jednoimienny. *Ejusdem nominis*  
 Kąt płaski. *Angulus planus*  
 Kąt bryłowy. *Angulus solidus*  
 Kłoc. *Truncus*

Krawędz



174 Krawędź. *Arrête* (po Francusku.)  
 Krzywy. *Curvus.*  
 Kula. *Sphera.*  
 194 Kulisty. *Sphericus.*  
 Nadmiar. *Excessus.*  
 216 Ośmiościan. *Oktôédrum.*  
 Ostrosłup albo Ostrogran. *Pyramis.*  
 Ostrokrag. *Conus*  
 Ostrokrag ścięty. *Conus truncatus*  
 Płaszczyzna. *Planum.*  
 Początkowy. *Elementaris.*  
 Półkole. *Semicirculus.*  
 Półkula. *Hemisphærium.*  
 Przecięcie. *Sectio.*  
 Rodzenie się. *Generatio*  
 Równik. *Æquator.*  
 Równoległoboczny. *Parallelogrammicus*  
 Równoległością. *Parallelogrammum*  
 Różległość. *Extensio*  
 Sciana. *Paries*  
 Spodek. *Pes*  
 Stały. *Constans*  
 Sześcian. *Hexâédrum*  
 albo *Cubus*  
 Trójkątny. *Triangularis*  
 Trójmnożny. *Triplicatus*  
 Walec. *Cylinder*  
 Warsta. *Stratum*  
 Wielościan. *Polyedrum*  
 Wyczerpanie. *Exhaustio*  
 Wymiar. *Dimensio*  
 Wyróżnia. *Oraculum*

Prze-

*Przeſtroga.* Na Tablicy VI. Fig. 3. o-  
puszczone ſą litery, p, q, które wpisać  
należy na końcach linii naybliſzſzey rō-  
wnoodlegley od linii PQ.

# OMYŁKI DO POPRAWIENIA

Karta.	Wierſz.	Stoi.	Popraw.
18	3	(BD. (AC.	AC, BD.
27	-	Fig. 2.	Fig. 3.
57	19	be.	- bc.
59	20	Doſt:	- Doſtyczney
	22	Doſt.	Doſtawy
79	5	1½	- 3½
100	przedostatni wierſz cały zmazać.		
108	5	GE.	- GF.
-	7	GF.	- GH.
-	25	Równoległobokow Równole- globoku.	
120	- 24	z ich	- ich.
133	- 1	Które y	- którey.
155	- 17	abc	- aby
175	- 22	powierzchni	na powierzchni
188	- 7	ściętego	- całego.
197	- 12	poſrodka	- od ſrodka
215	- 11	utworzony	utworzona
218	- 26	iaki	- iak i
225	- 6	C: b.	B: b.
236	- 5	do powierzchni	do powierz- chni podſtawy

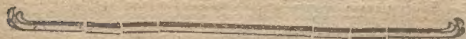
CZĘŚĆ





## CZĘŚC DRUGA

*O Bryłach.*



### WSTĘP.

**W** Części pierwszej samemi tylko zatrudnialiśmy się liniami i powierzchniami; lubo iakąkolwiek rozległość (*extensio*) będzie rzeczy iakiey, nie iest ona ani samą linią, ani samą powierzchnią, ale się rozciąga wzdłuż, w szerz i wgłąb. I tak, pokóy naprzykład, ma swoją długość, ma szerekosć, i wysokość, czyli grubosć. Tarcica, choćby naycieńsza, ma także długość, szerokosć i grubosć. Nie byłoby powierzchni, tey tarcicy, to iest: nie byłoby rozległości iey, nważaney co do długości tylko, i szerokosci, gdyby nie było

A tarcicy

tarcicy uważaney co do wszystkich  
ihey wymiarów. Powierzchnia ogranicza  
rozległość, i onę kończy; aby zaś gra-  
nica iakiey rozległości była w samey  
rzeczy, trzeba ażeby i ta rozległość by-  
ła. Nie byłoby więc powierzchni, gdy-  
by nie było rozległości, którą kończy;  
tak iak (mówiąc przez podobieństwo lu-  
bo dalekie) nie byłoby koloru naprzy-  
kład w suknie, gdyby nie było sukna.

Podobnym sposobem, lubo często nie  
uważaliśmy tylko długość iakiey rozle-  
głości (cośmy nazywali linią) niemasz  
jednak tey długości, jeżeli niemasz po-  
wierzchni, którą ona kończy, lub na  
którey może być w rzeczy samey cią-  
gnioną. Nie będzie więc długości, gdy  
nie będzie powierzchni; a że nie będzie  
powierzchni, jeżeli nie będzie rozle-  
głości mającey trzy wymiary; więc i linii  
nie będzie, tylko tam, gdzie jest rozle-  
głość, z trzema wymiarami.

Gdy się kto bawi około rozległości,  
ile ta trzy wymiary w sobie zamyka,  
w takim razie mówi się, iż się bawi o-  
koło *Ciała* (*Corpus*) albo *Bryły* (*Soli-  
dum*.)

Geome-



Geometrya nie uważa inaczej Ciała, tylko ile to rozciągnięte jest w zdłuż, w szerz, i wwyż albo w głąb; innemi zaś własnościami jego cale się nie zatrudnia, zostawiając je do uważania Fizykom. Lubo zaś zdaie się, iż sobie ściśle nader w uważaniu ciała założyli granice Geometrowie, mają jednak obszernie i tak pole dochodzenia wielu bardzo prawd ukrytych których wiadomość po większej części koniecznie jest potrzebna chcącemu w Fizyce postąpić.

Nie sami tylko Geometrowie, uważając ciała, jedną sobie w nich własność, to jest rozległość za cel wystawiają. Jest to, a przynajmniej być powinien, powszechny postępowania sposób, że gdy kto rzecz jaką z gruntu chce poznać, i pojąć; po części najprzód iey własności uważa, a dopiero łączy je razem, i dokładniejszy orzeczy cały nabywa wiadomości. Rozum ludzki nadto jest ograniczony, aby wiele pospółem nieznanym ielżce własności mógł dochodzić, a tym bardziej je ogarnąć.

Skutek takowego własności rzeczy z osobna dochodzenia, tym większy jest wagi, im więcej rzeczom też własności

sność służyć będzie ; a taką własnością jest rozległość. Cokolwiek pod zmysły nasze podpada i podpadać może, wzyśko to jest rozległym ; cokolwiek więc odkryje tym sposobem Geometra, może to do wszystkich rzeczy przystofować, które tylko pod zmysły nasze podpadają, lub im poddane być mogą. A ztąd się okazuje ważność w wynalazkach Geometrycznych, i obliwość w przystofowaniu onychże.

Lubo mając wzgląd na słabość pojęcia ludzkiego, iedną tylko własność ciała uważa Geometra, dla więkfzey iednak wygody i tę iefzcze dzieli nieiako na części, i w myśli ie ofobno ftawia, chociaż wrzeczy famey ofobno się nie znaydują. Nie ma względu rolnik na grubość ziemi w tym mieyfcu, gdzie rolę fwoię uprawia. Dostć mu natym, że ta grubość iefć doftateczna do przyięcia ziarna, do doftarczania fok i do rozwinienia się tegoż ziarna. Wielkość pola znać ofobliwiey ftara się, aby wiedział, ile na nim ziarna poftać może, a zatym powierzchnią fwego pola, bez względu na grubość ziemi uważa. Tak i pifzący, miarkuie wielkość powierzchni papieru, końcem zmiefzczenia na nim tego,



co ma pisać: nie wchodząc w jego grubość, i dosyć mając na tym, że mu atramentu nie przebiia.

Jakożkolwiek mała będzie grubość ciała iakiego, wszelako jednak, ciało to, dwie strony odmienne, przeciwne sobie mieć musi, i jedna z nich odłączyć się w rzeczy samey może od drugiej, lubo by nie znalazło się sposobne narzędzie do uczynienia tego rozłączenia. Ciało więc chociaż nacyieńsze, nie może być za jedno brane, co powierzchnia; a zatem nie prawdziwie rzecz wykładają niektórzy Geometrowie. gdy mówią: że ciało albo bryła składa się z powierzchni położonych jednych na drugich; bo iakąkolwiek byłaby liczba tych warst, z których ciało złożone uważamy, każda jednak wszechgulości ta warsta byłaby bryłą, a nie powierzchnią, ponieważ miałaby dwie strony przeciwne, i mogące się od siebie odłączyć.

Co się zaś powiedziało o powierzchniach, to i o liniach, twierdzić należy; że nie dla tego są od Geometrów uważane, iakoby w rzeczy samey znajdowały się, ale tylko dla łatwości i wygody.

dy. Nie wiele w to wchodzi podróżny, iak szeroka iest droga, którą ma przebyć, dosyć mu na tym, iż się nią udać może. Liczba kroków, które ma czynić nie zawisła od szerokości, ale od samey długości tey drogi; tę przeto długość szczególniey uważa.

Niechby była bardzo mała szerokość powierzchni iakiey, naprzykład Równoległoboku, i niechby ta sama tak mała szerokość podzielona była na iak nawięcey części, przez linie równoodległe od długości, wszelako każda z tych części będzie powierzchnią, i chociażby iak najmnieysza była odległość dwóch linii, które tę szczupłą powierzchnią kończą, za iedną iednak linią wziąć ieh nie można; a ztąd łatwo każdy widzi, iako to wyrażenie iest niedokładne a bardziey ieszcze fałszywe; że powierzchnia składa się z linii położonych iednych przy drugich..

Nakoniec zdarzają się przypadki, gdzie nie potrzeba nawet uważać przeciągu całej linii, ale koniec iey tylko ieden, lub obadwa, albo zgoła to, co dzieli dwie iey części. W takim razie mówi się, że Geometra samym się zatrzy-



trudnia *punktem*. Punktu w samey iſto-  
cie niemaſz, ieżeli niemaſz linii, którą  
punkt kończy, albo iey części, które  
oddziela. Podróżny cel ſwoiey drogi,  
iaki punkt iaki ſobie wyſtawia, wielko-  
ścią iego *całeſię* nie zaprzatając, aż  
poki do niego nie dojdzie, doſzedłszy,  
uważa dopiero obſzerność mieyſca, do  
którego dążył. Niemaſz wierzchołka  
kąta, ieżeli niebędzie dwóch linii ten  
kąt czyniących. Uwagi nad któremi  
ſię zaſtawia Geometra czyli to, co do  
położenia punktów iednych względem  
drugich, czyli względem linii iakiey,  
pochodzą z ſamego wyſtawienia ſobie w  
myśli tych rzeczy w iſtocie ſię nie  
znaydujących, dla łatwieyſzego doyſcia  
tego, czego ſzuka.

Jakożkolwiek mała będzie rozległość  
względem zmyſłów naſzych, lub wzglę-  
dem wielkości ciał, które nam naye-  
ſciey pod zmyſły podpadają: wſzelako  
można oddalić myślą tę małość wzglę-  
dem innych więkſzych rzeczy, i uwa-  
żać ciało choćby też naymnieyſze, iak  
gdyby wielkim bardzo było, a to  
względem tyſiączney naprzykład części  
ſwoiey.

Niech będzie iak naymnieyſza linia.  
tey linii koniec ieden, zawſze różnić ſię  
bę-

będzie od drugiego. J znowu niechby kto na iak naywiecey części podzielił iaką linią, każda z tych części dwa końce odmienne mieć będzie, a ztąd poznać można, iak nie prawdziwe jest to wyrażenie; że linia składa się z punktów przy sobie położonych.

Wystawiając sobie Geometra pod temi różnemi postaciami rozległość, uprzedzać tym samym zdaie się te trudności, które często zwykły bywać zarzucane o prawdziwey bytności (existentia) tych rzeczy, które są celem iego nauki.

*Powierzchnia płaska*,. jest powierzchnią, na której ku wszystkim stronom linie proste prowadzić można: i takimi to liniami i powierzchniami dotąd zatrudnialiśmy się; których wszystkie części na teyże samey *Płaszczyźnie* zostają (in eodem Plano). W części następującej takie nadto linie i powierzchnie zabawić nas będą, które na odmiennych *płaszczyznach* znajdują się.

Z dwoiakimi liniami mieliśmy jeszcze do czynienia, z prostymi i z kołowymi, lub ich częściami. Powierzchnie także, około których bawiliśmy się,  
były



były albo zakończone liniami prostemi, albo linią kołową, albo liniami prostemi, i częściami linii kołowych. W części następującej będziemy nadto za-  
 ławiać się różnemi powierzchniami *krzywemi* (*curva*) które wystawić sobie można iak gdyby początek miały z obrotu powierzchni płaskich, które jużśmy rostrząpiali. Obaczemy to w szczególności, gdy o każdej takiej powierzchni mowa będzie.

Co się zaś tycze *Brył*; te dwoiakośmy uważali; te dwoiakośmy gatunku zabawiać nas będą; i dnie, które są zakończone powierzchniami płaskimi, drugie, które się kończą powierzchniami krzywemi albo częścią krzywemi; częścią płaskimi.

Geometrya więc, jest to nauka, która się zabawia samą rozległością.

Linie proste dwoiakośmy uważali, raz co do ich wielkości, drugi raz co do ich położenia iednych względem drugich. W pierwszym względzie przyrównywaliśmy iedne do drugich, albo prosto zaraz, albo przez spólną im miarę, do której stosowaliśmy każdą z osobna linią. W drugim względzie, albo linie  
 z sobą

z sobą się spotykały, i ztąd początek kątów, i ich podziałów; albo się też nie spotykały.

Nauczyliśmy się dawać linii iedney względem drugiej iakiekolwiek do upodobania położenie: to jest robić kąt iakikolwiek dany, lub pociągnąć równo-odległą od linii danej. Wyznaczyliśmy miejsca wierzchołków, kątów iakichkolwiek danych, których ramiona przechodzą przez dwa punkta dane, i wiele ztąd użytecznych używań wywieśliśmy. Nie mogąc zaś dokładnie wyznaczyć sfosunku okrągu koła do linii prostej, przybliżyliśmy iak naybardziej sfosunek ten do prawdziwego. Widzieliśmy oraz, że porównanie okręgów iednych do drugich, nie zawiśło od porównania okręgu z linią.

Co do powierzchni; przytoczyliśmy nayprzód przypadki, w których dwie figury mogą przystać do siebie. Wi-  
dzieliśmy, że to przystawanie zawiśło iedynie od wielkości i położenia linii iednych względem drugich, to jest, że tylko takie dwie figury przystać mogą do siebie, w których boki iednakowey są wielkości iedne względem drugich, i  
iedna.



iednakowego położenia. Jednym z najsławniejszych przystosowań było przeniesienie, czyli przerysowanie jakiegokolwiek figury prostokątnej. Widzieliśmy także, iż wielkość figur prostokątnych nie zależy od wielkości i położenia ich boków, gdyż Trójkąty, lub Równoległoboki, byleby jednakowe miały podstawy, i wysokości, są równe; równe też będą, tak dwa na przykład Trójkąty, jako i dwa Równoległoboki, gdy ich podstawy będą w stosunku odwrotnym ich wysokości; Nadto równość w wielkości figur nie tylko nie zależy od wielkości i położenia boków, ale nawet ani od ich liczby; ponieważ Trójkąt, Równoległobok, i kwadrat może być tak zrobiony, że się równać będzie jakiegokolwiek figurze danej prostokątnej; może jeszcze zrównany być z sumą lub różnicą figur innych prostokątnych.

Można też przez przybliżenie porównać koło z figurą jaką prostokątną, i zrysować takie koło, któreby mało co różniło się od jednej lub więcej figur prostokątnych; dokładnie zaś można mieć koło równe innemu danemu, lub wielu innym kołom także danym.

Lubo

Lubo wielkość figury nie jest tym samym wyznaczona, że wyznaczony jest iey obwód i położenie boków; podany iednak mieliśmy sposób ieden znaywygodniejszy, wykryślenia figury prostokreślney o ilukolwiek bokach danych, mając dany iey obwód, widzieliśmy oraz granice, w których przy nie powiększonym obwodzie, powierzchnia figury być może powiększona; lubo zmniejszenia iey niema żadnych granic.

Z podobieństwa położenia linii, które kończą figurę, i z proporcjonalności tychże linii wynikało wiele twierdzeń, a z tych znowu wiele wniosków, i przystosowań. Szczegulniey zaś wynikało, przeniesienie na papier, działają na ziemi częstokroć nierówney odprawionych: które to przeniesienie dokładniejszy i łatwieyszym ięszcze stawało się, używszy rachunku.

W tym wszystkim, co się dotąd mówiło, niewspomniano się tylko o linii prostej, i o linii kołowej, o powierzchniach płaskich zakończonych przez linie proste, albo przez linie kołowe, lub ich części; o bryłach obwiedzionych powierzchniami płaskimi, albo krzywymi



wemi, mającemi swoy początek od powierzchni płaskich, Ta część Geometrii, nazywa się *Geometrią początkową* (*Geometria Elementaris*) Aluży ona za fundament koniecznie potrzebny do innych części zawilszych, z których się składa *Geometria wyższa*; (*Geometria sublimis*), a w tey rzecz iest o rozmaitych innych liniach krzywych, o powierzchniach przez nie zakończonych i owielu bardzo takich bryłach, których początek czasem można, a czasem nie można wyprowadzić z tych ostatnich linii krzywych, lub z powierzchni niemi zakończonych.

Różni się też *Geometria początkowa* od wyższej, i co do sposobu rysowania figur do niej należących; w Geometrii albowiem początkowej, dosyć iest na cerklu i linii do wykreślenia figur iey własnych; każde przeto zagadnienie, które z pomocą tych dwóch tylko narzędziów może być rozwiązane, do niej należy. Jeżeli zaś zagadnienie, mogąc być rozwiązany, z pomocą samej linii i cerkla, to iest przez samę linię i łuki kola, rozwiązuie się z użyciem innych ieszcze narzędziów, albo linii krzywych, odmiennych od kola, o  
tako-

takowym rozwiązaniu mówić się zwykło, iż nie jest wykonane sposobem zadosyć czyniącym.

## ROZDZIAŁ I.

*O położeniu tak Linii iako i Płaszczyzn iednych względem drugich.*

1. *Twierdz. 1.* Gdy linia ma dwa swoje punkta, na iedney płaszczyźnie, ma ie oraz i wszystkie na teyże płaszczyźnie.

*Dowodz:* Linia prosta wyznacza się przez dwa punkta; a zatym linia prosta poprowadzona przez dwa punkta dane, na daney także płaszczyźnie zniydzie się z każdą inną prostą, przez też dwa punkta poprowadzoną, i iedną z nią linią uczyni.

2. *Twierdz.* Przez linią prostą i punkt gdziekolwiek dany, może zawsze przechodzić iedną płaszczyzna.

*Dowodz* Wystawmy sobie myślą, iż przez tę linią przechodzi iakakolwiek płaszczyzna; niechay ta płaszczyzna obraca .

braca się około teyże linii, w tym obrocie przejdzie przez punkt dany, a w przechodzeniu będzie tą samą płaszczyzną, którey szukamy.

Można także i przez dwie linie przecinające się (a) przeprowadzić płaszczyznę; ponieważ płaszczyzna przechodząca przez jedną z tych linii i przez którykolwiek punkt drugiej, przechodzi razem i przez przecięcie tych dwóch linii, i przez punkt należący do drugiej linii. a zatem i druga ta linia cała jest na teyże płaszczyźnie.

Można nakoniec i przez trzy boki Trójkąta przeprowadzić płaszczyznę. Jakkóż płaszczyzna przechodząca przez dwa boki Trójkąta, przechodzi też i przez dwa punkta, w których trzeci bok przecina

---

(a) A więc. przecinające się, bo wiele jest linii, których położenie jest takie, że przez nie nie może razem przechodzić jedna płaszczyzna; a przykład w koscie od gąsania, tak jest położone ramię jedno kąta, na jednej stronie, i bok przeciwny drugiemu ramieniu tegoż kąta. na innej stronie. że przez te dwie linie, jedna płaszczyzna przechodzić nie może.



cina tamte dwa, a zatym i ten trzeci bok na teyże jest płaszczyźnie.

3. *Twierdz.* 3. Gdy się dwie płaszczyzny przecinają, tym spólnym ich przecięciem, jest linia prosta.

*Dowódz.* Weźmy na tym spólnym przecięciu dwa iakiekolwiek punkta, i poprowadźmy przez nie, na iedney z dwóch płaszczyzn, linią prosta; ta linia będzie miała na drugiej płaszczyźnie dwa punkta do siebie należące, więc i cała będzie na teyże drugiej płaszczyźnie; a zatym będzie cała na obydwóch płaszczyznach, to jest będzie spólnym ich przecięciem.

To co się o płaszczyznach powiedziało, można porównać z tym, co się linii tycze; to jest: linia prosta wyznacza się przez dwa punkta, płaszczyzna wyznacza się przez trzy punkta lub przez dwie linie przecinające się. Gdy znówu dwie linie wzajem się przecinają, punkt spólnym ich jest przecięciem; gdy zaś przecinają się dwie płaszczyzny, spólnym ich przecięciem jest linia prosta.

4. *Twierdz.* 4. Gdy linia prosta do dwóch innych, które się przecinają na iedney

iedney płaszczyźnie, prostopadłą jest w punkcie ich przecięcia, będzie też prostopadłą i do każdej innej linii, przechodzącej przez ten punkt na tejże płaszczyźnie.

Można to nayprzód objaśnić na karcie przełamanej. Linia prosta, podług której karta się przełamała, prostopadłą jest do boków, części dwóch, tej karty przełamanej. Obracając część iednę złamaną, około złamania, czyli spólnego przecięcia, bok ieden z dwóch, do którego linia przecięcia była prostopadłą, odmieniać będzie położenie, wszelako iednak; na iedney zstanie płaszczyźnie, i linia przecięcia zawsze do niego będzie prostopadłą. Ten przykład prawdę tę zmysłom dosyć ukazuje, nie dosyć iednak ukazuje ją rozumowi.

*Dowód.* Niech będą dwie linie proste, AB, CD. przecinające się w P, i niech do obydwóch prostopadłą będzie linia SP. Na płaszczyźnie przechodzącej przez te dwie linie, przeciągnąwszy przez punkt P. iakżkolwiek linią EF, do tej linii będzie też prostopadłą linia SP.

Tab. I.

Fig. 1.

B Weźmy

Weźmy linie równe: PA, PB, i znowu PC, PD, także równe. Poprowadźmy BD spotykającą linią EF, w punktach AC, E, i F.

Ponieważ Trójkąty: APC, BPD, mają dwa boki równe iedne względem drugich, i kąty między temi bokami zawarte, także równe, więc mogą przystać do siebie; a w szczególności kąt PAC, równy jest kątowi PBD. Przeto i Trójkąty APE, BPF iako mające równe boki: PA, PB, i kąty równe iedne względem drugich, mogą też do siebie przystać, a w szczególności, równe są w nich boki PE, PF, i AE, BF.

Pociągniemy jeszcze linie SA, SB, SC, SD; Trójkąty prostokątne SPA, SPB, mają bok spólny SP, i boki PA, PB, równe; a zatem mogą do siebie przystać, a w szczególności linie SA, SB, są równe. Podobnie równe są i linie SC, SD. Dwa więc Trójkąty CSA, BSD, których boki wszystkie równe są iedne względem drugich, mogą do siebie przystać, a w szczególności kąty SAC, SBD są równe.

Poprowadziwszy SE, SF; Trójkąty: SAE, SBF mają boki SA, AE, równe  
względem.



względem boków SB, BF, i kąty między temi bokami zawarte, równe; więc mogą do siebie przystać; a w szczególności równe są linie, SE, SF.

Więc w Trójkątach SPE, SPF, równe są boki w iednym, względem boków drugiego, a zatem i te przystać mogą do siebie; a w szczególności kąt SPE, równa się kątowi SPF; a że są kątami przyległemi, czynią razem dwa kąty proste; każdy z nich przeto będzie kątem prostym; a zatem linia SP, będzie też prostopadłą i do linii EF.

To Twierdzenie bardziej w dowodzeniu długie niż trudne, powinno być objaśnionym przez figurę z papieru grubszego, lub z drewna, i z nici; lub w inny sposób. Toż rozumieć trzeba i względem wszystkich prawie podań, w tej części zawartych.

5. *Defin.* Gdy linia prostopadłą jest do wszystkich innych, które się wpunkcie iey spadku przecinaiają na płaszczyźnie jakiej, o takiej linii mówi się, że jest prostopadłą do tej płaszczyzny; a zatem jeżeli linia prostopadłą jest do

B 2 . . . dwóch

dwóch innych w punkcie ich przecięcia, na płaszczyźnie, ta linia prostopadłą jest i do tej płaszczyzny.

6. *Twierdź: 5. Wzajemnie, jeżeli linia, prostopadłą jest do trzech innych linii, które się w jednym i tym punkcie przecinają; płaszczyzna ta, która przechodzi przez dwie z tych trzech linii przechodzi też i przez третią.*

*Tab. 1.* Niech będzie linia SP, prostopadłą do  
*Fig. 1,* linii PB, PD, PF, które przechodzą przez tenże sam punkt P, linii SP.

Niechay płaszczyzna iaka przechodzi przez linią SP, i PF. Jakażkolwiek będzie linia, w której ta płaszczyzna, przecina drugą płaszczyznę przechodzącą przez linie PB, i PD, wszelako linia SP będzie prostopadłą do tego wspólnego przecięcia, a zatem gdyby linia PF, nie była tym wspólnym przecięciem, tedy linia SP, byłaby prostopadłą do dwóch linii leżących na tejże co i ona płaszczyźnie, to jest: byłaby prostopadłą do linii PF, i do drugiej jeszcze linii różney od PF przecinającej wspólnie dwie płaszczyzny; co być nie może. Linia więc PF, nie jest różna od wspólnego przecięcia dwóch płaszczyzn SPF, BPD, a zatem jest tym  
spol-

spólnym przecięciem, i przeto należy i do drugiej płaszczyzny BPD; to jest ta płaszczyzna BPD przechodząca przez linię PB, PD, przechodzi też i przez linię PF.

7. *Twierdź*: 6. Dwie linie prostopadłe do jednej płaszczyzny, są od siebie równoodległe.

*Tab. I.*

Niech będą dwie linie BA, CD prostopadłe do jednej płaszczyzny, na którą spadają w punktach B, i C, te dwie linie są równoodległe.

*Fig. 2.*

Poprowadzmy linią BC, a od końca C wspólnego linii BC, z linią DC, prostopadłą do płaszczyzny, wyciągniemy na tej płaszczyźnie prostopadłą CE, do BC, równą jakiegokolwiek długości BA, wziętej na drugiej linii prostopadłej do tejże płaszczyzny. Poprowadźmy jeszcze i linię BE, AE. Dwa Trójkąty ABC, ECB, mają wspólny bok BC, boki także BA, CE, równe, z wykryśleniem, i kąty proste: ABC, BCE; więc te Trójkąty mogą przystać do siebie, a w szczególności linie BE, AC, są równe. Dwa tedy Trójkąty ABE, ECA mają względem siebie równe wszystkie boki,

aza-



a zatem przyśtać mogą do siebie; a w szczególności równe są kąty  $ABE, ACE$ ; że zaś linia  $AB$ , prostopadłą jest do linii  $BE$ , (ponieważ wzięliśmy ją za prostopadłą do płaszczyzny przechodzącej przez linie  $BC, BE$ ) więc kąt  $ACE$ , jest też prosty; a zatem linia  $EC$ , prostopadła do dwóch linii  $CB, CD$ , z wykrylenia, jest też prostopadłą i do linii  $CA$ . Przeto ta linia  $CA$  jest na tej samej płaszczyźnie, co i linie  $BC, CD$ . Aże płaszczyzna przechodząca przez linie  $AC, CB$ , przechodzi też i przez linią  $AB$ , więc linie  $AB, CD$ , są na jednej płaszczyźnie; będąc zaś na jednej płaszczyźnie, że są prostopadłemi do linii  $BC$ , więc od siebie równoodległemi będą.

*Prześtroga* Aby łatwiej zrozumieć to dowodzenie, dobrze będzie przegiąć Figurę 2, w linii  $BC$ ; tak, aby część jedna  $ABCD$  tej Figury, przypadła prosto nad drugą częścią  $BEC$ . Podobnie dopomagać można łatwiejszemu wyobrażeniu i w innych Figurach, gdzie nie jedna zachodzi płaszczyzna.

*Uwaga* W pierwszej części cokolwiek się mówiło o liniach równoodległych, zawsze to było w tym rozumieniu, że te linie kreślone były, na tej samej

samey płaszczyźnie, na której i każda inna linia łącząca dwa ich punkta, leżała.

8, *Twierdź*: 7. Jeżeli dwie linie są od siebie równoodległemi, a jedna z nich prostopadłą jest do jakiej płaszczyzny, będzie i druga do teyże płaszczyzny prostopadłą.

Weźmy dwie linie BA, CD za równoodległe; jeżeli jedna z nich napr. CD, jest prostopadłą do jakiej płaszczyzny, będzie i druga do teyże płaszczyzny prostopadłą i druga BA.

*Tab. I.*

*Fig. 2*

Na płaszczyźnie, do której wzięliśmy za prostopadłą, CD, pociągniemy CB; będą do CB, prostopadłemi obie dwie linie AB. i CD. Natęże płaszczyźnie niech będzie CE prostopadłą do BC, i równą długości BA. Poprowadźmy jeszcze AC, AE, BE. Całe dowodzenie natym zawisło, aby okazać, że kąt ABE jest prostym, to jest, że linia AB prostopadła do linii BC, jest razem prostopadłą i do linii BE, leżącej na tey samey płaszczyźnie, do której linia CD jest prostopadłą.

Dwa Trójkąty prostokątne ABC, ECB. mają ramiona kąta prostego równe i równe

dne względem drugich ; a zatem te dwa Trójkąty mogą przysłać do siebie, a w szczególności linie AC, BE, są równe. Mają tedy dwa Trójkąty ABE, ECA, wszystkie trzy boki równe iedne względem drugich, i mogą zatem przysłać do siebie ; a w szczególności równe są kąty ABE, ACE. Płaszczyzna przechodząca przez dwie linie równoodległe AB, CD, przechodzi też tak przez linia DC, jako i przez AC, więc linie DC, BC, AC, na iedney płaszczyźnie leżą. A że linia CE jest prostopadłą do dwóch linii CD, BC; będzie też prostopadłą i do trzeciej linii CA ; a zatem kąt ACE jest prostym ; a że ten kąt, jest równy kątowi ABE, więc i kąt ABE, jest prostym.

9. Zagad: Spuścić prostopadłą do  
Tab. I. płaszczyzny, z punktu nie na niej danego.

Fig. 3. Niech będzie taki punkt S, z którego spuścić trzeba prostopadłą na daną płaszczyznę.

Rozwiązanie. Na płaszczyźnie danej nakreślmy iakąkolwiek linia AB. Niech przez tę linia i przez punkt dany S, przechodzi inna płaszczyzna, na której po-  
ciągnij-



ciagniemy SD, prostopadłą do AB. Na danej płaszczyźnie niech też będzie poprowadzona DP, prostopadła do AB; a przez linie SD, DP, niech przechodzi płaszczyzna, na której niech będzie SP prostopadłą do linii DP; ta linia SP będzie razem prostopadłą, której szukaliśmy.

*Wykreślenie służące do dowodzenia.*  
Niech przez P, przechodzi linia EF, równoodległa od AB.

*Dowódz:* Linie SD, PD, z wykreślenia są prostopadłe do linii AB; więc linia DB, wzajemnie jest do obydwóch tych linii prostopadłą; a zatem prostopadłą jest i do płaszczyzny przechodzącej, przez te dwie linie. Aże linia EF równoodległa jest od linii AB, więc linia EF jest też prostopadłą do tejże płaszczyzny SDP; a wszczegulności prostopadłą jest do linii SP; i linia SP, jest wzajemnie do linii EF prostopadłą. Ze zaś linia SP zrobiona była prostopadłą do linii PD, więc linia SP jest razem prostopadłą do linii EF, i PD, które się przy iey spadku P, przecinają na danej płaszczyźnie, a zatem linia SP, prostopadłą jest i do tejże płaszczyzny.

10. *Zagadn.* 2. Od punktu danego na płaszczyźnie wynieść prostopadłą do teyże płaszczyzny.

*Rozwiąz:* Spuścimy do płaszczyzny danej z punktu iakiegokolwiek nie na niey będącego, prostopadłą, a przez punkt dany poprowadźmy równoodległą od teyże prostopadłej.

11. *Uwaga* 1. Od punktu danego, ie-dną tylko prowadzić można prostopadłą, do płaszczyzny.

12. *Uwaga* 2. Gdy linia iaka nie iest ani na samej płaszczyźnie, ani do niey prostopadłą; może być albo od niey równoodległą, albo tak, iak zechcemy do niey nachyloną.

*Nayprzod.* Jeżeli, spuściwszy z dwóch punktów linii iakiey, dwie prostopadłe na płaszczyznę, te prostopadłe będą sobie równe; tedy ta linia od której są spuszczone, będzie równoodległą od płaszczyzny, na którą ie spuściliśmy, to iest: niespotka nigdzie tey płaszczyzny, choćby tak linia, iako i płaszczyzna naydaley były przedłużone.

*Powtore*

*Powtore.* Niech będzie linia  $SD$ . *Tab. I.*  
nie prostopadłą do płaszczyzny; ale niech *Fig. 2.*  
spotyka płaszczyznę w punkcie *naprz:*  
1). Z punktu któregokolwiek tej linii  
naprz: z  $S$ , spuśćmy do tej płaszczyzny  
prostopadłą natrafiającą na nią w pun-  
kcie  $P$ , i poprowadźmy  $PD$ . Kąt  $SDP$ ,  
nazywa się kątem *pochyłości* (*angulus*  
*inclinationis*) tej linii  $SD$ , do płaszczy-  
zny.

Ten kąt jest najmniejszym z tych  
wszystkich, które czynić może linia  
 $SD$ , z jakąkolwiek inną linią poprowa-  
dzoną na tej płaszczyźnie, przez punkt  
 $D$ , i gdyby z punktu  $P$ , iako ze środka  
promieniem równym linii  $PD$ , nakry-  
ślony był okrąg koła, wszystkie linie  
ciągnięte od punktu  $S$ , do punktów te-  
go okręgu, czyniłyby jednakowy za-  
wsze kąt z tą płaszczyzną.

Ponieważ te podania są tylko do in-  
nych główniejszych *pomocnicze* (*subsi-*  
*diariz*) i łatwe do dowiedzenia, przesta-  
je się tu na samym ich wyrażeniu.

13. *Twierdź: 8.* Gdy dwie linie ró-  
wnoodległe są od trzeciej, która na od-  
mienney od nich leży płaszczyźnie; te  
dwie



dwie linie i od siebie równoodległe będą.

*Tab: I.* Niech będą dwie linie AB, CD, równoodległe od linii EF, będą te dwie linie i od siebie równoodległymi. Od punktu któregokolwiek na linii EF, naprz: G, wyciągniemy dwie do tey linii prostopadłe: GH, GI, na płaszczyznach przechodzących przez tę linię EF, i przez AB, i CD. Ponieważ linia EF, jest prostopadłą, tak do lini GH, iako i do linii GI, więc też będzie prostopadłą do płaszczyzny przechodzącej przez te dwie linie. A że znowu dwie linie AB, CB są równoodległe od linii EF, więc są obiedwie prostopadłe do płaszczyzny przechodzącej przez linie GH, GI, a zatem są od siebie równoodległe.

14. *Twierdza: 9.* Gdy dwie linie, które się przecinają są równoodległe względem dwóch drugich, które się także przecinają, kąt zawarty między dwiema pierwszemi liniami, równy będzie kątowi zawartemu między dwiema drugimi.

*Tab: I.* Niech będą dwie linie AB, AC, równoodległe względem dwóch drugich DE,

DE, DF; kąt BAC zawarty między dwiema pierwszemi, równy jest kątowi EDF zawartemu między dwiema drugimi.

Weźmy równe linie AB, DE, i równe także linie AC, DF. Pociągniemy linie AD, BE, CF, BC, EF.

Ponieważ linie AB, ED, są równe, i równoodległe, Czworokąt ABED będzie oraz Równoległobokiem, i linie też AD, BE, będą równymi, i równoodległymi.

Podobnie równe są i równoodległe linie AD, CF; więc linie BE, CF są też równe, i równoodległe, względem linii AD; a zatem równe są sobie, i od siebie równoodległe. Jest tedy Czworokąt BEFC, oraz Równoległobokiem, a w szczególności równe są linie BC, EF. Przeto Trójkąty BAC, EDF, boki trzy równe mają, iedne względem drugich, a zatem przystać mogą do siebie, a w szczególności równe są kąty BAC, EDF.

15. *Przystosowanie.* Niech będą dwie płaszczyzny, które się przecinają. Na każdej z tych płaszczyzn wystawmy prostopadłą, do wspólnego ich przecięcia, wyprowadzoną od punktu któregookol-  
wiek

wiek tegoż przecięcia. Kąt zawarty między dwiema temi prostopadłemi, iednakowy zawsze będzie, chociaż coraz inny na spólnym przecięciu punkt wybierać będziemy, do wyprowadzenia z niego tych prostopadłych.

*Defin:* Jest przeto taki kąt zdatnym do wymierzenia pochyłości tych dwóch płaszczyzn iedney względem drugiej. Gdy zatym kąt zawarty między temi dwiema prostopadłemi, jest prosty, mówi się, że w takim razie *płaszczyzna iedna jest prostopadłą do drugiej*. Gdyby zaś kąt między temi dwiema prostopadłemi zawarty, miał:  $10^{\circ}$ ,  $20^{\circ}$ ,  $30^{\circ}$  i t. d. w tym razie i dwie płaszczyzny zawierałyby kąt:  $10^{\circ}$ ,  $20^{\circ}$ ,  $30^{\circ}$ , i t. d.

Można ieszcze i w inny sposób, przeświadczyć się iako pochyłość dwóch prostopadłych, wyciągniętych na dwóch płaszczyznach, od iednego punktu linii przecięcia spólnego tych płaszczyzn, odpowiada zawsze pochyłości tychże dwóch płaszczyzn. Wystawmy albowiem sobie te dwie płaszczyzny przyftające do siebie, i leżące iedna na drugiej. Niech potym spodnia płaszczyzna zostanie na swym miejscu, a wy-



a wyższa niech się podnosi, i obraca około wspólnego przecięcia. Wspólne przecięcie, podczas tego obrotu będzie zawsze prostopadłe, do dwóch linii prostopadłych wyciągniętych na obydwóch płaszczyznach, od jednego punktu; a zatem te dwie prostopadłe zostające zawsze każda na swojej płaszczyźnie, odpowiadać będą podczas tego obrotu, pochyłości dwóch płaszczyzn. Gdy naprz: płaszczyzna ruchoma, obieży połowę drogi, którą ma obejść trzeba, aby się znalazła na drugiej stronie, w równi z płaszczyzną nieruchomą, w ten czas i prostopadła do wspólnego przecięcia, znajdując się na płaszczyźnie ruchomej obieży połowę tej drogi, którą ma obejść, aby się w jednej równi stykała końcem swoim z drugą linią prostopadłą do wspólnego przecięcia wyciągniętą na płaszczyźnie nieruchomej. Toż mówić i o innych częściach tego obrotu.

**16. Twierdź: 10.** Gdy jaka prosta linia prostopadła jest do płaszczyzny, do tejże płaszczyzny prostopadła będzie każda inna płaszczyzna przez tę linią przechodząca.

Niech

*Tab: I.* Niech będzie linia GP, prostopadła  
*Fig: 6.* do iakiey płaszczyzny, i niech przez tę  
 linią GP, przechodzi inna iakakolwiek  
 płaszczyzna; ta prostopadła będzie do  
 pierwszej płaszczyzny.

Niech linia AB, będzie spólnym tych  
 dwóch płaszczyzn przecięciem; od pun-  
 ktu P, przez pierwszą płaszczyznę wy-  
 ciągnijmy PC, prostopadłą do tego  
 spólnego przecięcia.

Ponieważ linią GP, wzięliśmy za  
 prostopadłą do pierwszej płaszczyzny,  
 więc GP prostopadłą będzie tak do linii,  
 AB, iako i do linii PC; bo te dwie lini-  
 ie przechodzą przez pierwszą płaszczy-  
 znę; a zatem od punktu którego kol-  
 wiek nap: P. znajduiącego się na spól-  
 nym przecięciu dwóch tych płaszczyzn,  
 wyciągnijmy, prostopadłe PG. PC, do  
 tegoż spólnego przecięcia, te linie bę-  
 dą prostopadłe jedna do drugiej; a ztąd  
 prostopadłe będą do siebie i te dwie  
 płaszczyzny.

17. *Propozycja.* Gdy linia iaka prostopa-  
 dła jest do płaszczyzny, a na teyże pł-  
 aszczyźnie pociągniemy iakakolwiek in-  
 ną linią, i do tey spuścimy drugą pro-  
 stopadłą

stopadłą od spodka pierwszej prostopadłej; poprowadziwszy potem od któregokolwiek punktu pierwszej prostopadłej, linią do punktu, w którym druga prostopadła spotyka linią pociągniętą na płaszczyźnie; ta ostatnia linia poprowadzona, prostopadłą będzie do linii na płaszczyźnie pociągniętej.

Niech będzie SP, prostopadłą do płaszczyzny; pociągniemy na tejże płaszczyźnie linią AB, i spuścimy do niej prostopadłą PD od spodka P, linii SP. Poprowadziwszy z punktu któregokolwiek, naprz: S, linii prostopadłej SP, linią SD, do punktu D, w którym prostopadła PD spotyka linią AB, ta linia SD, będzie prostopadłą do AB.

Tab: I.  
Fig: 3.

Przez punkt P, przeciśniemy EF równoodległą od AB.

Ponieważ linia SP prostopadła jest do płaszczyzny, danej, będzie też prostopadłą i do EF znajdującey się na tej płaszczyźnie; a wzajemnie i EF będzie prostopadłą do SP. Też linia EF, jako równoodległa od AB, jest też prostopadłą do PD; a zatem będąc prostopadłą tak do PD, iako i do PS, będzie także pro-

C. stopa-



stopadłą i do płaszczyzny SPD przechodzącej przez te dwie linie; więc i AB równoodległa od EF będzie też prostopadłą do płaszczyzny SPD, a wszczegulności będzie prostopadłą do linii SD, zn. ydniającej się na tej płaszczyźnie.

**18. Twierdź: 11.** Gdy płaszczyzna jedna prostopadłą jest do drugiej, a przez którykolwiek punkt jedney z tych płaszczyzn pociągniemy prostopadłą do drugiej, ta prostopadła, padnie na wspólne przecięcie tych dwóch płaszczyzn.

*Dowód:* Gdyby linia SP nie padała na wspólne przecięcie dwóch płaszczyzn, tedy spuściwszy z tegoż samego punktu S, prostopadłą, do wspólnego przecięcia, ta byłaby oraz prostopadłą i do drugiej płaszczyzny, a zatem dwie prostopadłe z jednego punktu spuszczone byłyby, na jedną płaszczyznę, co być nie może.

**19. Twierdź: 12.** Gdy dwie płaszczyzny prostopadłe są do trzeciej, wspólne przecięcie tychże dwóch płaszczyzn, prostopadłe też będzie do tejże trzeciej płaszczyzny.

*Dowód:* Od punktu, w którym linia przecięcia dwóch pierwszych płaszczyzn, spotyka

spotyka trzecią płaszczyznę; pociąg-  
nawszy tak naiedney iak i na drugiej  
z dwóch pierwszych płaszczyzn pro-  
stopadle do dwóch linii spólnego ich  
przecięcia z trzecią płaszczyzną, te dwie  
prostopadle, prostopadłeni też będą do  
trzeciej płaszczyzny; a zatym gdyby  
te dwie prostopadle nie zeszły się w ie-  
dnę, i nie były w rzeczy samey jedną  
linią, która jest spólnym przecięciem  
dwóch pierwszych płaszczyzn, tedy od  
iednego punktu możnaby do iedney  
płaszczyzny dwie prostopadle wypro-  
wadzić; to zaś być nie może.

20. *Twierdż:* 13. Gdy iedna linia  
prostopadła jest do dwóch płaszczyzn,  
te dwie płaszczyzny, nigdzie się z sobą  
nie zeydą; choćby naydaley były prze-  
dłużone.

*Dowódz:* Gdyby te dwie płaszczy-  
zny mogły się spotkać z sobą, tedy  
Trójkąt zrobiony z tej prostopadłej  
i z dwóch linii poprowadzonych od  
punktu iakiegokolwiek na spólnym prze-  
cięciu dwóch tych płaszczyzn, do pun-  
któw w których prostopadła spotyka też  
płaszczyzny, miałby dwa kąty proste, co  
być nie może.

*Defin:* Dwie płaszczyzny, które nawet przedłużone spotkać się z sobą nie mogą, nazywają się *równoodległemi*.

**21. Twierdź: 14.** Gdy dwie linie są równoodległe względem dwóch drugich, płaszczyzna przechodząca przez dwie pierwsze linie, będzie równoodległa od płaszczyzny przechodzącej przez dwie drugie linie.

**Tab. I.** Niech będą dwie linie AB, AC równoodległe względem dwóch drugich DE, DF; płaszczyzna przechodząca przez linie AB, AC, równoodległa będzie od płaszczyzny przechodzącej przez linie DE, DF.

Z wierzchołka A, kąta zawartego między dwiema pierwszymi liniami spuścimy prostopadłą AG do płaszczyzny przechodzącej przez drugie dwie linie, i od spodka G, tej prostopadłej poprowadźmy na teyże samey płaszczyźnie linie GH, GI, równoodległe względem linii DE, DF.

Linia AG, prostopadła do drugiej płaszczyzny, jest też prostopadłą, i do linii GH, GI; a że linie AC, GI, są o-  
biedwie

biedwie równoodległe od linii DF, więc i od siebie są równoodległemi; a zatem linia AG, jest także prostopadłą do linii AC. Tymże sposobem pokazać można, że linia AG, jest też prostopadłą do linii AB. Więc ta linia AG, jest prostopadłą do płaszczyzny przechodzącej, przez linie AB, AC; a zatem i dwie płaszczyzny przechodzące jedna przez linie AB, AC, druga przez linie DE, DF, są obiedwie prostopadłe do tejże samej linii AG, a przeto są od siebie równoodległe.

22. *Twierdź: 15.* Gdy dwie płaszczyzny równoodległe od siebie przecina trzecia płaszczyzna, ich wspólne przecięcia z trzecią płaszczyzną, będą też od siebie równoodległe.

*Dowódz:* Gdyby te wspólne przecięcia, z trzecią płaszczyzną spotkały się gdzie z sobą, tedy punkt przecięcia tych dwóch przecięć, należąc tak do jednego i do drugiego wspólnego przecięcia, dwóch płaszczyzn z trzecią, należałby też tak do jednej, iak i do drugiej z dwóch płaszczyzn przecinających trzecią; a zatem dwie płaszczyzny spotkałyby się gdzie z sobą, to jest nie byłyby, iak są, równoodległe.

23. *Twierdź: 16.* Gdy dwie płaszczyzny są od siebie równoodległe; linia która



ra jest prostopadłą do iedney, z tych płaszczyzn, będzie prostopadłą i do drugiej.

Tab. I. Niech będą dwie płaszczyzny równoległe: BAC, EDF; i linia AG prostopadła, do iedney z tych płaszczyzn nap: do pierwfzey; taż linia prostopadłą będzie i do drugiej płaszczyzny.

Jeżeli linia AG, nie jest prostopadłą do któreykolwiek linii, takiey iak GH, przeciętioney przez spodek G, teyże linii AG, który jest na płaszczyźnie EDF; tedy przeciągnąwszy przez linię GH, AG, płaszczyznę, któraby przecięła płaszczyznę BAC, w linii AB; linia AG będzie prostopadłą do linii AB; więc linie AB, GH, z których iedna jest, a druga nie jest prostopadłą do linii AG, leżącey na teyże samey, co one, płaszczyźnie, spotkać się mogą z sobą; a przeto i płaszczyzny, na których leżą spotkać się też z sobą mogą, i nie będą równoległe; co jest przeciwko warunkowi,

24. Twierd. 17. Gdy dwie linie leżące albo nie leżące na iedney płaszczyźnie, przecięte są przez trzy równoległe od siebie płas-

plaszczyny, te linie będą od tych plaszczyny przecięte proporcjonalnie.

Niech będą dwie linie AB, CD, leżą- *Tab. I.*  
ce, albo nie, na iedney plaszczynie; *Fig. 8.*  
niech trzy plaszczyny równoodległe  
przecinaia pierwszą linią w punktach,  
B, F, A, a drugą w punktach, C, G, D;  
będzie,  $BF : AF = CG : DG$ .

Poprowadźmy linią BD, spotykającą  
plaszczynę średnią w punkcie E.

Linie EF, AD, są spólnemi przecięcia-  
mi plaszczyny BAD, z dwiema pla-  
szczynami równoodległemi; więc te  
dwie linie są od siebie równoodległe; a  
zatem podobne są Trójkąty: BFE, BAD;  
przeto,  $BF : AF = BE : ED$ .

Dla teyże przyczyny podobne będą  
Trójkąty; BDC, EDG, a zatem  $BE : ED = CG : GD$ . Więc też będzie,  $BF : AF = CG : GD$ .

*Uwaga* W tym razie tylko linie BC,  
AD są równoodległe. i oraz linie FE,  
EG, iedną czynią linią, gdy linie AB,  
CD na teyże samey plaszczynie znay-  
duia się.

## ROZDZIAŁ

## ROZDZIAŁ II.

### O Kątach Bryłowych,

**Defin.** Wykreślmy iakikolwiek Wielokąt na płaszczyźnie; od każdego wierzchołka kąta w tym Wielokącie wyciągniemy linie do iednego punktu, nie na tey płaszczyźnie będącego. Przy tym punkcie tyle się zrobi kątów znajdujących się na odmiennych płaszczyznach, ile Wielokąt nayprzód wykreślony, miał boków. Summa tych wszystkich kątów płaskich, nazywa się *kątem Bryłowym* (angulus solidus). Punkt, który iest spólnym wierzchołkiem wszystkich kątów płaskich, nazywa się: *wierzchołkiem tego kąta bryłowego*. Płaszczyzny na których się znajdują kąty płaskie, które ten wierzchołek czynią, nazwać można, *ścianami* (paries albo-facies:) a zaś spólne tych płaszczyzn przecięcia *krawędziami* (po Francuzku *Arrêtes*.)

**Prześtroga.** W tym wszystkim, co się tu o kątach bryłowych powie, wystawiać sobie trzeba nie inne Wielokąty, iak tylko te, których krawędzie scho-

dząc

dzące się w ich wierzchołkach, same kąty  
wyssakujące tam czynią (b).

Trzy rzeczy uważać można w kącie  
bryłowym: ściany albo kąty płaskie, któ-  
re go tworzą, pochyłości wzajemne  
tych ścian, i stożunek placu zawartego  
między temi ścianami, do placu całego,  
około wierzchołka kąta bryłowego; w  
podobny prawie sposób, iak też uważa-  
liśny wielkość kąta płaskiego, wzglę-  
dem całego placu, około wierzchołka  
tegoż kąta, na iedney z tym placem pla-  
zczczyźnie znajdujacego się. *Obacz ni-  
żej, co służy do oświatleny tej uwagi, w  
Rozdziale o kuli (Sphara.)* Jako Wielo-  
ką, w którego wierzchołkach kończą  
się krawędzie kąta bryłowego, może  
być na Trójkąty podzielony przez prze-  
kątne ciągnięte od iednego z wierzchoł-  
ków iego; tak też i kąt bryłowy iaki-  
kolwiek, podzielić można na inne kąty  
bryłowe, złożone z trzech tylko kątów  
płaskich. Przeto i Geometrowie nay-  
więcey się bawią około kątów brył-  
wych

---

(b) *Obacz o innych kątach bryłowych,  
Rozprawę P. Bermanna, pod tytułem  
De angulis solidis. Dissertatio. Vit-  
tembergæ 1764.*



wych, trzema kątami płaskimi określonych, aby dołzli pochyłości ścian, lub ich wielkości; a potem wiadome mając dostatecznie te pochyłości i wielkości ścian, wyznaczają kąt bryłowy, który się z tych ścian układa. Część ta Geometrii, w której o kątach bryłowych rzecz jest, pod tą, pod którą je wystawiamy postacia nazywa się Trygonometrią *kulną*, albo *sferyczną*. (Trigonometria spherica). Damy przyczynę tego nazwiska, gdy się o kuli mówić będzie. Jest ta część koniecznie potrzebna Astronomom. Na daniu pierwszych o niej początków, tu przestaniemy, i nie więcej mówić będziemy o kątach bryłowych, tylko tyle, ile wiedzieć potrzeba będzie dla zrozumienia podań ściągających się do samychże brył.

25. *Twierdż: 1.* W kącie bryłowym zrobionym z trzech kątów płaskich, suma dwóch z tych trzech kątów, większa jest od kąta trzeciego,

*Tab. II. Dowodz:* Niech będzie kąt bryłowy *Fig. 1.* w A zrobiony z trzech kątów płaskich: BAC, BAD, CAD; którykolwiek z tych trzech kątów wzięty, mniejszy jest od summy dwóch innych,

Jeżeli

Jeżeli te trzy kąty są wszystkie równe, już oczywiście dwa, większe są od jednego.

Jeżeli zaś kąt jeden nap: BAC, większy jest tak od kąta BAD, jak i od kąta CAD, tedy wszelako mniejszy będzie od summy obydwóch.

Zróbmy albowiem na płaszczyźnie BAC, kąt BAE równy kątowi nap: EAD; i weźmy dwie długości równe AD, AE; na linii także AB, weźmy punkt którykolwiek, nap: B; Przez trzy punkta: B, D, E, niech przechodzi płaszczyzna przecinająca krawędź, AC w punkcie C.

Dwa Trójkąty: BAD, BAE, mają bok spólny AB, boki: AD, AE, równe, i kąty między temi bokami zawarte, równe; więc te Trójkąty mogą przysłać do siebie, a w szczególności, linie: BD, BE, są równe. Aże w Trójkacie, BDC, summa boków: BD, CD większa jest od trzeciego boku: BC, więc bok DC, większy jest od linii CE; a zatem Trójkąty: CAD, CAE, mają bok spólny: AC, boki: AD, AE, równe; podstawa zaś DC, jednego większa jest od podstawy CE, drugiego; więc kąt: CAD, w wiechołku  
pię-

pierwszego Trójkąta, większy jest od kąta: CAE, w wierzchołku drugiego; więc i summa kątów: BAD, CAD, większa jest od summy kątów: BAE, CAE, to jest: większa od kąta BAC.

26. *Twierdź: 2.* W kącie bryłowym, summa wszystkich kątów płaskich, mniejsza jest od summy czterech kątów prostych. (c)

*Dowodzi:* Wierzchołki Wielokąta, na których wspierają się wszystkie krawędzie kąta bryłowego, są oraz wierzchołkami tylu innych kątów bryłowych zrobionych

---

(c) Trzeba mieć na pamięci, że się tu nie mówi, tylko o kątach bryłowych, których krawędzie wspierają się na wierzchołkach Wielokąta, mającego same tylko kąty wystakujące. W przypadku od tego odmiennym, mogą być kąty bryłowe, takie, w których summa kątów płaskich, będzie większa od 4. kątów prostych tyle, ile zechcemy. P. Le Sage Geneweczyk pierwszy tę prawdę odkrył, która też pierwsza i sama jedna zda się uchybienie zadawać Euklidesowi. Obacz *Historię Akademii Nauk Paryskiej* na Rok 1756.

bionych przez kąty trzy płaskie, ile ten Wielokąt ma wierzchołków; gdyż każde dwa z tych kątów płaskich wchodzących w kąt jeden bryłowy, znajdują się przy podstawach ścian tego kąta bryłowego, a trzeci takowy kąt należy do podstawy kąta bryłowego w wierzchołku, to jest: do Wielokąta na którym się wszystkie krawędzie kąta bryłowego w wierzchołku, wspierają.

Na każdej z tych ścian summa trzech kątów, jednego w wierzchołku, a dwóch przy podstawie ściany, równa się summie dwóch kątów prostych; a za tym summa wszystkich kątów w wierzchołku i wszystkich kątów przy podstawach ścian, równać się będzie, dwom kątom prostym tyle razy wziętym, ile ma ścian kąt bryłowy.

Summa dwóch kątów przy podstawach ścian, większa jest od kąta trzeciego przy podstawie kąta bryłowego, który kąt trzeci, z dwoma tamtymi robi kąt jeden bryłowy przy tej podstawie; a za tym summa wszystkich kątów przy podstawach ścian wszystkich, większa jest od summy wszystkich kątów przy podstawie kąta bryłowego.

Więc



Więc summie wszystkich kątów, przy podstawach ścian, mniej nie dostaie do summy dwa razy tylu kątów prostych, ile Wielokąt, czyli podstawa kąta bryłowego, ma boków; niżeli summie wszystkich kątów Wielokąta tego nie dostaie do teyże summy dwa razy tylu kątów prostych, ile ten Wielokąt ma boków.

A że summie kątów wszystkich Wielokąta do przerzeczoney summy, brakuie 4. kątów prostych, więc summie kątów wszystkich przy podstawach ścian, brakować będzie do teyże summy mniej niż 4. kąty proste. Ze zaś summa wszystkich kątów przy wierchołku kąta bryłowego, spełnia ten niedostatek mnieyszy od 4. kątów prostych, więc summa wszystkich kątów przy wierchołku kąta bryłowego, mnieysza jest od 4. kątów prostych.

To Twierdzenie objaśnić trzeba przez wiele przykładów szczepulnych, biorąc różne liczby ścian kąta bryłowego napr. 3, 4, 5, 6. i t. d. wktórych to razach, takoważ liczba 3, 4, 5, 6. i t. d. będzie wyrażać boki Wielokąta służącego kątowi bryłowemu za podstawę; summa zaś kątów

tów Wielokąta będzie ważyć: 2, 4, 6, 8, i t. d. kątów prostych, a zatem summa kątów przy podstawach ścian będzie ważyć więcej niż 2, 4, 6, 8, i t. d. kątów prostych. Ze zaś summa tych ośmiu kątów wraz z summą kątów przy wierzchołku kąta bryłowego, waży w tychże razach, kątów prostych 6, 8, 10, 12, więc summa kątów samych przy tym wierzchołku mniejsza jest, niż nadmiar (excessus) liczb.

6, 8, 10, 12, i t. d.

nad liczby - - 2, 4, 6, 8, i t. d.

To jest: ta summa kątów przy wierzchołku mniejsza jest od 4 kątów prostych.

Można prawdę tego Twierdzenia okazać i w sposób następujący:

Obierzmy punkt jakikolwiek, wpośród Wielokąta, i pociągniemy od niego linie do wszystkich wierzchołków tego Wielokąta. Summa wszystkich kątów, około tego punktu, zrówna sumnę 4 kątów prostych. Wynieśmy teraz myślą ten punkt nad płaszczyznę Wielokąta, podług

podług ciągu linii prostopadłej do tej płaszczyzny. Im bardziej ten punkt oddalony będzie od wierzchołków Wielokąta, tym bardziej zmniejszy się każdy kąt przy tym punkcie, zawarty między liniami, od niego poprowadzonymi do wierzchołków Wielokąta; a zatem tym mniejsza będzie summa wszystkich kątów przy tym punkcie, od summy pierwszey 4. kątów prostych.

27. *Przystosowanie.* Pięć tylko jest gatunków kątów należących do Wielokątów foremnych, z których może się złożyć kąt bryłowy.

1. W kącie bryłowym zrobionym z trzech kątów Trójkąta równobocznego, każdy taki kąt ważyłby  $\frac{2}{3}$  kąta prostego, a zatem summa ich ważyłaby 2. kąty proste.

2. W kącie bryłowym, złożonym z czterech kątów Trójkąta równobocznego, summa takich kątów, ważyłaby  $2\frac{2}{3}$  kąty proste.

3. W kącie bryłowym, złożonym z pięciu kątów Trójkąta równobocznego, summa takich kątów ważyłaby  $3\frac{1}{3}$  kąty proste. Sześć

Sześć kątów Trójkąta równobocznego, waży kątów prostych cztery. Są one zdadne do napelnienia placu, około punktu iakiego na płaszczynie, nie zaś do zrobienia kąta bryłowego. Summa więcey niż sześciu takowych kątów, ważyłaby też więcey niż cztery kąty proste.

4. W kącie bryłowym złożonym z trzech kątów kwadratu, każdy takowy kąt, byłby kątem prostym, a zatem summa takowych kątów równałaby się summie 3 kątów prostych; summa 4 kątów kwadratu, byłaby summa 4 kątów prostych; a przeto z 4 takowych kątów składać się nie może kąt bryłowy, daleko zaś bardziej składać się nie może z więkzhey liczby takich kątów.

5. W kącie bryłowym, złożonym z trzech kątów. Pięciokąta foremnego, każdy takowy kąt ważyłby  $1\frac{1}{5}$  kat prosty; a zatem summa ich ważyłaby  $3\frac{3}{5}$  kąty proste.

Summa czterech takowych kątów, a tym bardziej więcey niż czterech ważyłaby więcey, niż cztery kąty proste.

D

Sum-



Summa trzech kątów Sześciokąta foremego waży cztery kąty proste, a zatem żaden kąt bryłowy nie złoży się z samych kątów Sześciokąta foremnego; tym bardziej zaś żaden kąt bryłowy składać się nie może z samych kątów należących do Wielokątów foremnych, które więcej niż sześć boków mają.

Jeżeli tedy znajdzią się bryły iakie, których ścianami są Wielokąty jednakowego tylko gatunku, takich brył gatunków, więcej iak pięć być nie może.

Bryła, którey każdy kąt bryłowy złożony jest z trzech kątów Trójkąta równobocznego. ma 4. ściany, z których każda jest Trójkątem równobocznym, i 4 kąty bryłowe. Nazywa się *Czworościanem* (Tetraëdram).

Bryła, którey każdy kąt złożony jest z 4. kątów Trójkąta równobocznego, ma ścian 8, z których każda jest Trójkątem równobocznym, i 6. kątów bryłowych. Nazywa się *Ośmiościanem* (Oktôëdram.)

Bryła, którey każdy kąt złożony jest z 5 kątów Trójkąta równobocznego, ma

ma 20. ścian, z których każda jest Trójkątem równobocznym, i 12, kątów bryłowych. Nazywa się *Dwudziestościanem* (Icosædram.)

Bryła, której każdy kąt złożony jest z 3 kątów kwadratu, ma 6 ścian, z których każda jest kwadratem, i 8 kątów bryłowych. Nazywa się *Sześcianem* (Hexædram,) a zwyczajniey (Cubus.)

Bryła, której każdy kąt złożony jest z 3 kątów Pięciokąta foremego, ma 12 ścian, z których każda jest Pięciokątem foremnym, i 20 kątów bryłowych. Nazywa się *Dwunastościanem* (Dodecædram.)

Dosyć będzie pokazać uczniom takie bryły, nie wchodząc w obszernie w tey mierze rozwodzenia się, które więcey samey ciekawości dogadzaia, niż pożytek przynoszą. Te bryły, gdy wszystkie kąty mają równe, i wszystkie ściany foremne, i mogące przyśtać jedne do drugich, nazywają się bryłami foremnymi.

Gdyby wkładzie bryłowym pomieszać chcieliśmy różne kąty Wielokątów foremnych, końcem złożenia tegoż kąta

bryłowego, liczba takich kątów płaskich, mogłaby być do upodobania powiększona.

28. *Twierdza*: 3. Gdy dwa kąty bryłowe złożone są z trzech kątów płaskich, równych iednych, względem drugich; pochyłości ścian, tychże kątów bryłowych równe też są iedne względem drugich.

*Tab. II* Niech będą dwa kąty bryłowe: ABCD,  
*Fig. 2.* abcd złożone z równych kątów względem siebie: BAD, bad, BAC, bac, DAC, dac; pochyłości płaszczyzn równe też będą iedne względem drugich; nap: pochyłość płaszczyzny BAD do BAC, równa jest pochyłości płaszczyzny bad, do bac.

*Wykreśl*: Weźmy równe linie AB, ab, na płaszczyznach: BAD, bad: wynieśmy do AB prostopadłą BD, a do ab, prostopadłą bd. Na płaszczyznach także BAC, bac, wyprowadźmy do tychże linii AB, ab, prostopadłe: BC, bc. Kąty CBD, cbd, będą kąty pochyłości płaszczyzn BAD, BAC, i bad, bac: a zatem dowieść należy, że te kąty: CBD, cbd, są równe.

*Dowód*:

*Dowodz:* Dwa Trójkąty DBA, dba są prostokątne w B i b; mają równe kąty BAD, bad, i boki: AB, ab, równe; więc mogą przylegać do siebie; a więcze gulości, linie: BD, bd są równe, iako też i linie AD, ad.

Dla teyże przyczyny i Trójkąty BAC, bac przylegać do siebie mogą, a więcze gulości linie BC, bc, są równe, iako też i linie AC, ac.

Więc Trójkąty CAD, cad, mają boki AC, ac równe; i boki AD, ad także równe, a mając oprócz tego i kąty między temi bokami zawarte, równe, przylegać do siebie mogą; więcze gulości zaś linie CD, cd, są równe.

Więc Trójkąty: CBD, cbd, mają wszystkie boki równe, iedne względem drugich, a zatym do siebie przylegać mogą; a więcze gulości kątów: CBD, cbd, są równe.

29. *Twierdż:* 4. Gdy dwa kąty bryłowe, składają się z trzech kątów płaskich, które równe są iedne względem drugich, takie kąty bryłowe, mogą przylegać do siebie,

Niech,



Niech będzie kąt bryłowy w  $A$ . złożony z trzech kątów płaskich:  $BAD, BAC, DAC$ , równych względem kątów płaskich:  $bad, bac, dac$ , z których się składa kąt drugi bryłowy w  $a$ .; te dwa kąty bryłowe, mogą przyśtać do siebie.

Wystawmy sobie w myśli drugi z tych kątów, jakoby przeniesiony, tak; aby wierzchołek  $a$ , przypadł na wierzchołek  $A$ ; linia zaś  $ab$  aby leżała na linii  $AB$ . Ponieważ kąty:  $BAD, bad$ , wzięte są za równe, linia więc  $ad$ , będzie też leżeć na linii  $AD$ .

Aże trzy kąty płaskie w  $a$ , równe są trzem kątom w  $A$ ; równe więc będą pochyłości płaszczyzn  $BAD, BAC$ , i płaszczyzn  $bad, bac$ ; a zatem płaszczyzna  $bac$ , leżeć będzie na płaszczyźnie  $BAC$ . Dla równości zaś kątów  $bac, BAC$ , linia  $ac$  leżeć będzie na linii  $AC$ ; więc tak linia  $ad$ , leży na linii  $AD$ , jak i  $ac$  na  $AC$ ; a zatem płaszczyzna  $cad$  przyśtać do płaszczyzny  $CAD$ ; przyśtańa tedy do siebie te dwa kąty bryłowe.

30. *Wniosek.* Kąt bryłowy, określony trzema kątami płaskimi, już tym samym jest wyznaczony, gdy mamy wiadome te trzy kąty płaskie.

Możnaby

Możnaby też pokazać, że z trzech kątów płaskich czyniących kąt bryłowy mając wiadome dwa z tych kąty, i pochyłość ich ścian, wyznacza się także kąt bryłowy; iako też z wiadomey tylko pochyłości wszystkich trzech ścian tego kąta.

Te jednak ostatnie podania, iż nie-  
buzą do naszego zamierzenia, przeto  
dosyć jest tu o nich tylko namienić.

31. Zagadn: 1. Zrobić kąt bryłowy,  
mając dane trzy kąty płaskie, z których  
ma być złożony tenże kąt bryłowy.

Do składu tego kąta bryłowego z 3,  
kątów płaskich; następujący sposób, zda-  
je się być naywygodnieyszym.

Niech będą dane trzy kąty płaskie: *Tib: II.*  
BAD, BAC, DAC, do zrobienia kąta *Fig: 3.*  
bryłowego. Wstawmy sobie myślą. iż  
ten kąt już jest zrobiony. Weźmy któ-  
rykolwiek punkt C, na krawędzi nap:  
AC; i od tego punktu, spuścimy na inne  
krawędzie, AB, AD, linie prostopadłe:  
CB, CD; a znowu od punktów B, i D,  
na płaszczyźnie BAD, poprowadźmy do  
teyże krawędzi, prostopadłe: BE, DE,  
które

które się przetną, w punkcie E. Pociąg-  
niemy nakoniec linie: CE, AE.

Ponieważ linie CB, EB są prostopadłe  
do linii AB, linia więc AB jest prosto-  
padłą do płaszczyzny: CBE; a zatem  
płaszczyzna BAD, która przechodzi  
przez linią AB, jest też prostopadłą do  
płaszczyzny: CBE; a wzajemnie, i ta  
płaszczyzna jest do tamtej prostopadłą.  
Dla teyże przyczyny, płaszczyzna, CDE,  
prostopadłą jest do płaszczyzny BAD;  
więc obiedwie płaszczyzny: CBE, CDE,  
prostopadłe są do płaszczyzny: BAD; a  
zatem wspólne ich przecięcie CE, jest tak-  
że prostopadłym do płaszczyzny BAD;  
i płaszczyzna CAE, jest także prostopa-  
dłą do teyże płaszczyzny BAD. Zkąd  
wypada takowe wykreślenie.

Po obydwóch stronach linii ac, przy  
punkcie a, nakreślmy kąty: cab, cad,  
równe względem kątów danych CAB,  
CAD. Od punktu któregokolwiek tey-  
że linii ac, nap: od c, spuśćmy na dwa  
drugie ramiona, ab, ad, linie prosto-  
padłe: cb, cd; a na ramionach trzeciego  
kąta weźmy, zaczawszy od wierzchoł-  
ka A, linie AB, AD, równe względem  
linii ab, ad. Od punktów B, i D wy-  
pro-

prowadźmy prostopadłe do linii AB, AD, przecinające się w punkcie E, a od tego punktu wynieśmy znowu prostopadłą EC, do płaszczyzny BAD. Niech przez linie EC, i AE przechodzi inna płaszczyzna, na której z punktu A, iak ze środka, promieniem równym odległości ac, nakreśmy łuk koła, który przetnie prostopadłą EC, punkcie C; Naostatek przez punkt C, i linie AB, AD, niech przechodzą dwie płaszczyzny te, wraz z płaszczyzną BAD, zrobią kąt bryłowy, którego szukamy.

Inaczey ieszcze punkt C, będzie wyznaczony na prostopadłej EC; gdy tylą linią, EC, weźmiemy, aby kwadrat iey równał się różnicy kwadratów: linii ac, i AE, albo różnicy kwadratów: cd, i DE, albo nakoniec różnicy kwadratów: be i BE.

**32. Uwaga.** Używając tego wykreślenia, można łatwo dowieść następującego Twierdzenie, na którym się załada Trygonometrya kulna; to iest, że:

W każdym kącie bryłowym zrobionym z trzech kątów płaskich, wstawia jednego kąta płaskiego, iest do wstawy drugie.



drugiego, iak wstawia kąta pochyłości przeciwnego pierwszemu kątowi, do wstawy kąta pochyłości przeciwnego drugiemu kątowi; to iest, iak wstawia kąta pochyłości płaszczyzn dwóch ścian pod pierwszym kątem będących, do wstawy kąta pochyłości dwóch także ścian pod drugim kątem będących.

Jakoż linie: CD, CB, są wstawami, pierwsza kąta CAD, drugą, kąta CAB, wzięwszy za promień linią AC; a zatem te dwie linie tak się do siebie mają, iak wstawy tych dwóch kątów.

Aże w Trójkącie ECD prostokątnym w E;  $CD : CE = Pr : Wft. CDE$

A w Trójk. EBC;  $CE : CB = Wft : CBE : Pr$

Więc złożymy te stosunki, będzie;  $CD : CB = Wft : CBE : Wft. CDE$ .

To iest: Wstawia kąta CAD, tak się ma do wstawy kąta CAB, jak wstawia kąta pochyłości dwóch płaszczyzn BAD, BAC, do wstawy kąta pochyłości dwóch płaszczyzn BAD, CAD.

32. Zagadn:

33. *Zagadn:* 2. Mając dane trzy ką-  
ty płaskie, z których się ma składać kąt  
bryłowy, wyrachować, iaka ma być po-  
chyłość płaszczyzn, aby ten kąt zrobiły.

*Sposob 1.* W Czworokącie ABED,  
kąty przeciwne B, i D są proste: więc  
Czworokąt ten może być wkoło wpi-  
sanym, a zatym kąty (w tymże samym  
odcinku) ADB, AEB będą równe. Wyrachowawszy tedy w Trójkącie BAD  
kąt ADB, już tym samym znajdziemy  
i kąt AEB, równy tamtemu.

Stosunek boku BC do BE, to jest sto-  
sunek wstawy całej, czyli promienia, do  
Dostawy kąta pochyłości CBE, składa się  
z stosunków boków: BC do AB i AB  
do BE.

Aże jest;  $BC:AB = \text{Stycz. BAC:Wst. całej,}$

i -  $AB:BE = \text{Wst. cała:Dostycz. AEB}$

więc;  $BC:BE = \text{Stycz. BAC:Dost. AEB}$   
A zatym;  $BC:BE = \text{Stycz. BAC:Dost. AEB}$   
Stycz.—BAC: Dost: AEB=Pr:Dost:CBE.

*Sposob 2.* Wyciągnawszy od punktu  
jednego nap: B znajdującego się na któ-  
rejkol-

rejkolwiek krawędzi kąta bryłowego, prostopadłe: BD, BC, do tej krawędzi, a na dwóch płaszczyznach, których spólnym przecięciem jest ta krawędź, niech te dwie prostopadłe spotykają dwie drugie krawędzie w punktach: C, i D: Linie BC, BD będą stycznymi, a linie AC, AD będą stycznymi względem kątów, BAC, BAD, biorąc za promień linią AB. Węc te linie, mogą być wyrachowane namiarę linii stałej AB, czyli promienia, W Trójkącie CAD wiedząc dwa boki AC, AD i kąt CAD, między nimi zawarty możemy wyznaczyć bok trzeci CD. W Trójkącie zatym CBD wiedzieć będziemy trzy boki, a ztąd, możemy wyznaczyć kąt CBD, który jest kątem pochyłości dwóch płaszczyzn: BAD. BAC. Inne też kąty pochyłości łatwo wyznaczymy podług uwagi poprzedzającej.

### PRZYGOTOWANIE DO ROZDZIAŁOW NASTĘPUJĄCYCH.

*O podniesieniu liczby do iey Sześcianu albo Kubusa, i o wyciągnięciu Pierwiastku Sześciennego, albo Kubicznego.*

Przed następującemi Rozdziałami, kładzie się nauka o podniesieniu liczby do Sześcianu, i o wyciąganiu Pierwiastku sześciennego.

sześciennego ; bo właśnie w tych rozdzielach, można będzie naukę tę do praktyki zaraz przytłosować.

34. Sześciann liczyby iakiey robi się, gdy tę liczbę przez nią samą raz mnożemy, i tak rozmnożoną, ieszcze raz przez nią mnożemy albo, co na iedno wychodzi, gdy tę liczbę mnożemy przez iey kwadrat. I tak Sześcianny dziewięciu liczb pierwszych.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

śa: 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729.

Sześcianny liczb:

10, 20, 30, 40, - - - 90.

śa: 1000, 8000, 27000, 64000, - - - 729000.

Sześcianny liczb:

100, 200, 300, - - 900.

śa: 1000000, 8000000, 27000000, 729000000.

35. Sześcianny więc liczb mających iedną tylko cyfrę, a resztę zerów, śa te same,



fame, co i sześciany tychże cyfr samych przez się, przydawszy im trzy razy tyle zerów, ile ich było w liczbie z której się Sześcian robi.

Wyraz ten *Sześcian*, wzięty jest z Geometrii, w której, aby mieć bryłowatość iakiego Sześcianu, rozmnaża się liczba wyrażająca wielkość boku iego, raz i drugi przez siebie.

Sześcian każdej liczby znaleźć można, mnożąc iey kwadrat przez nią samę; podamy tu iednak inny sposób zrobienia Sześcianu z liczby danej, a ten sposób pomoże nam do przeciwnego działania, to jest do wyciągania Pierwiątka Sześciennego z liczby iakiejkolwiek.

36. Sześcian liczby złożony z dwóch części, może być rozłożony na cztery części następujące.

1. Na Sześcian pierwszej części.
2. Na Kwadrat pierwszej części trzy razy wzięty i rozmnożony przez część drugą.
3. Na Kwadrat drugiej części trzy razy wzięty, i rozmnożony przez część pierwszą.
4. Na

4. Na

4. Na Sześcian drugiey części.

I tak liczbę 5. rozłożywszy na dwie części naprzyk: 1, i 4; można uważać iey Sześcian, iakoby złożony z czterech części: 1, 12, 48, 64, których Summa jest: 125. Gdybyśmy zaś tę samę liczbę 5, uważali iako złożoną z dwóch części 2, i 3; iey Sześcian mogłby się być rozłożyć na cztery części: 8, 36, 54, 27-

Niechby potrzeba znaleźć Sześcian liczby nap: 47; Ponieważ iey kwadrat (podług reguły już nam wiadomey) składa się z kwadratu pierwszey części 40, z teyże części 40, dwa razy wziętey, przez drugą, 7. rozmnożoney, i z kwadratu drugiey części 7; mnożąc cały ten kwadrat ieszcze raz przez 40, i przez 7, albo przez 47, Sześcian z 47 składać się będzie:

Z Kwadratu liczby 40, rozmnożonego przez 7, z 40, rozmnożonych przez kwadrat liczby 7, dwa razy wzięty, i z Sześcianu teyże liczby 7; (biorąc 7 za liczbę mnożącą;) biorąc znowu 40, za liczbę mnożącą; Sześcian z 47, składać się ieszcze będzie z Sześcianu liczby 40; z 7, rozmnożonych przez kwadrat liczby

liczby 40, dwa razy wzięty; i z 40 rozmnożonych przez Kwadrat liczby 7, raz wzięty; a razem to wszystko zebrawszy, składać się będzie z Sześcianu liczby 40, z kwadratu teyż liczby trzy razy wziętego, a rozmnożonego przez 7, z kwadratu liczby 7, trzy razy wziętego, a rozmnożonego przez 40, i z Sześcianu liczby 7. Co uczyni Summę: 103823, która iest Sześcianem liczby 47.

Ponieważ zaś niemożna ieszcze dowieść tego Algebraicznie, trzeba przy-  
namniej będzie z Geometrii zaciągnąć objaśnienia, pokazując; że Sześcian linii złożoney z dwóch części, może być w rzeczy samey rozłożony na Sześciany każdej, z tych dwóch części, i na 6. Równoległościanow, z których trzy mieć będą za podstawę kwadrat iedney części; a za wysokość część drugą; trzy zaś inne, mieć będą za podstawę kwadrat drugiey części, a za wysokość część pierwszą.

Wykonać to w skutku będzie można na Sześcianie z drewna lub z papieru tak zrobionym, aby te części od siebie się oddzielały.

38. Naywygodniej jest, rozłożyć liczbę na iedności, dziełiatki, sta, i t. d. które w sobie zawiera.

Niech będzie liczba nap: 12. Podzielmy ją na dwie części, 10, i 2. Sześcian iey składać się będzie z części następujących:

1000. Sześcian dziełiatku

600. Kwadrat dziełiatku trzy razy wzięty przez iedności rozmnożony.

120. Kwadrat iedności trzy razy wzięty przez dziełiatkę rozmnożony

8. Sześcian dwóch iedności.

1728 Sześcian z 12.

Niech będzie liczba 84, rozebrana na dwie części 80, i 4; Sześcian iey mieć będzie części następujące:

E 3840.



512000. Sześcian dzieśiątków,  
 76800. Kwadrat dzieśiątków trzy  
 razy wzięty, przez iedności  
 romnożony.  
 3840. Kwadrat tychże iedności trzy  
 razy wzięty przez dzieśiątki  
 rozmnożony.  
 64. Sześcian z iedności.

---

592704. Sześcian z 84.

Niech będzie liczba 324, rozebrana na  
 dwie części 320 i 4; aby zaś mieć Sze-  
 ścian pierwfzey części, rozłożmy ją na  
 części 300, i 20,

27000000. Sześcian fłów  
 5400000. Kwadrat fłów potrójny przez  
 dzieśiątki rozmnożony.  
 360000. Kwadrat dzieśiątków potrój-  
 ny przez fła rozmnożony.  
 8000. Sześcian dzieśiątków.  
 1228800. Kwadrat z 320 potrójny ro-  
 zmnożony przez iedności  
 15360. Kwadrat z iedności potrójny,  
 rozmnożony przez 320.  
 64. Sześcian iedności.

---

34012224. Sześcian z 324.

Niechby

Niechby trzeba zrobić Sześcian z 842r.

512000000000 Sześcian z 8000,

76800000000 Kwadrat z 8000 po-  
tróyny, roz:  
przez 400.

38400000000 Kwadrat z 400 po-  
tróyny roz:  
przez 8000.

640000000 Sześcian z 400.

42336000000 Kwadrat z 8400 po-  
tróyny rozm:  
przez 20.

100800000 Kwadrat z 20. potróy-  
ny rozm:  
przez 8400.

8000. Sześcian z 20.

212689200 Kwadrat z 8420 po-  
tróyny rozm:  
przez 1.

25260 Kwadrat z 1. potróy-  
ny rozm:  
przez 8420.

- 1. Sześcian z 1.

---

597160402461. Sześcian z 8421.  
E 2 39. Wi-

39. Widziemy na poprzedzających przykładach, iż przez takowy rozbiór, każda część następująca Sześcianu mniej ma jednym zerem, od części, która ją poprzedziła; i że iako pierwsza część Sześcianu jest zawsze Sześcianem, a po nim następują dwie części, każda złożona z potrójnego kwadratu iedney części rozmnożonego przez część drugą; tak i dalej, tymże porządkiem idą, i dalsze wyrazy części składających Sześcian.

40. Można było opuścić zera kładąc tylko same cyfry znależące, a w każdej części następującej wyłępując z ostatnią cyfrą w prawą. I tak części Sześcianu mogły być w ten sposób wypisane.

27

54

36

8

12288

1536

64.

---

34012224.

41. Ten

41. Ten sposób postępowania, poka-  
zuje nam, że liczba wyrażająca Sześcian  
jedności, kończy się na ostatniey po praw-  
wey ręce cyfrze, że Sześcian dzieł-  
tów kończy się na czwartey od praw-  
wey ręki cyfrze; liczba Sześcianu słów,  
kończy się na siódmej cyfrze od teyże  
strony rachując, i t, d.

Zeby więc wiedzieć liczbę cyfr wyra-  
żających Pierwiastek Sześcianu danego,  
trzeba od prawey strony zaczynać, od-  
działy co trzy cyfry kreskami poczynić;  
a ile będzie tych oddziałów, tyle też  
cyfr będzie się znajdowało w Pierwia-  
stku. Oddział pierwszy po lewey stro-  
nie może mieć trzy, dwie, a czasem i  
jedną tylko cyfrę, iako to przykłady po-  
przedzające okazują. I tak Pierwiaſtki  
sześciennie liczb 1,331; 32,767; 226,981;  
mają dwie cyfry.

42. Niechby trzeba z liczby 1331, wy-  
ciągnąć pierwiaſtek sześcienny:

Ta liczba ma dwie cyfry w swoim  
Pierwiaſtku, bo dwa w niej ~~można~~  
można oddziały, tym sposobem: 1,331.  
Naywiększa liczba dziełtów tego Pier-  
wiaſtku taka być powinna, aby iey  
Sześcian



Sześcian nie był większy od 1; a zatem będzie tylko jeden dzieśniak w Pierwiaſtku. Sześcian z 10, ieſt: 1000; który Sześcian odiaſzły od 1331, zoſtanie 331. Ta reſzta powinna zamykać w ſobie potrójny kwadrat dzieśniaka rozmnożony przez iedności; potrójny kwadrat tych iedności, rozmnożony przez dzieśniak, i Sześcian tychże iedności. Aże wſzczegulności ta reſzta, ma w ſobie zamykać kwadrat potrójny dzieśniaka rozmnożony przez iedności; wſtawmy więc ſobie tę reſztę 331, iak gdyby zamykała tylko ſam potrójny kwadrat z 10, to ieſt 300. Wieloraz z 331, przez 300 podzielonych, ieſt: 1, więc iedna iedność będzie w Pierwiaſtku. Rozmnożywſzy 300 przez 1, będzie 300, a te, od 331, odiaſzły, zoſtanie 31. Ta reſzta ma ieſzcze w ſobie zamykać potrójny kwadrat iedności przez dzieśniak rozmnożony, to ieſt: 30; i Sześcian iedności, to ieſt: 1, a ze wſzytkim 31, które odiaſzły od oſtaniey reſzty nic nie zoſtanie; a zatem Pierwiaſtek ſześcienny liczby 1331, ieſt: 11.

Wyciągniemy Pierwiaſtek ſześcienny z liczby 68.921. Pierwiaſtek tej liczby ma dwie cyfry. Liczba dzieśniaków ta-  
ka

ka być powinna, aby Sześcian iey odiać  
można od pierwszego podziału: 68.  
Aże z Tablicy dziewięciu pierwszych  
sześcianów (34) którą uczniowie umieć  
na pamięć powinni, Sześcian najbliższy  
68; iest 64. a tego Pierwiastek iest: 4;  
więc w Pierwiaſtku będą 4 dzieliątki.  
Sześcian z 40, iest: 64000; odiawszy  
go od 68921, zostanie 4921. Ta reſzta  
ma wſzezegulności zawierać w ſobie  
potrówny kwadrat dzieliątów, ro-  
zmnożony przez iedności, to iest ma  
w ſobie zawierać 4800 rozmnożone  
przez iedności. Dzielać 4921. przez  
4800, wypada 1, na wieloraz, więc bę-  
dzie w Pierwiaſtku iedna iedność. Od-  
iawszy od 4921, kwadrat potrówny 4800.  
rozmnożony przez 1, zostanie 121. Ta  
reſzta ma ieſzcze w ſobie zawierać kwa-  
drat potrówny iedności, rozmnożony  
przez 4 dzieliątki, to iest 120, i Sze-  
ścian iedności, to iest 1, a ze wſzyt-  
kim, 121; które odiawszy od oſtatniey  
reſzty, nic nie zostanie; a zatym Pier-  
wiaſtek zupełny będzie: 41.

Wyciągniemy Pierwiaſtek ſześcienny  
z liczby 884.636. Tateż liczba ma dwie  
cyfry w ſwoim Pierwiaſtku, Sześcian  
najbliższy liczby 884. iest: 729, któ-  
rego

rego Pierwiaſtkiem ieſt 9, więc Pierwiaſtek będzie miał 9 dzieſiątków. Szeſcian z 90, ieſt 729000; który odiaſzſzy od 884736, zoſtaſanie 155736. Kwadrat z 90, ieſt 8100, potrójny będzie: 24300. Dzieląc przez 24300, reſztę 155736, na wieloraz wypada 6, więc Pierwiaſtek mieć będzie 6. jednoſci. Rozmnożywſzy 24300 przez 6, będzie 145800, które odiaſzſzy od 155736, zoſtaſanie 9936. Kwadrat potrójny 6 jednoſci, rozmnożony przez 9 dzieſiątków, będzie 9720, odiaſzſzy go od 9936, zoſtaſanie 216, nakoniec Szeſcian z 6, ieſt 216; a zatym Pierwiaſtek zupełny będzie 96. Jakoż Szeſcian z 96, ieſt: 884,736.

Wyciągniemy Pierwiaſtek ſzeſcienny z liczby 590,589,719. Ten powinien mieć trzy cyfry.

Liczba ſłów. w Pierwiaſtku taka być powinna, aby icy Szeſcian, nieprzechodził 590. Z dziewięciu pierwſzych Szeſcianów, naybliſzſzy liczby 590 ieſt Szeſcian: 512, którego Pierwiaſtek; ieſt 8; a zatym 8 ſłów będzie w Pierwiaſtku. Odiaſzſzy 512000000, od Szeſcianu danego, zoſtaſanie 78589719. Kwadrat

drat potrójny  $8$ , albo  $800$ , to jest  $1920000$  znajduie się razy  $40$  w tej reszcie ; mogłoby więc zdawać się, iż  $4$  dziesiątki Pierwiastek mieć powinien; aleby nie można od  $78589719$  odjąć dwóch innych części, to jest kwadratu potrójnego dziesiątków rozmnożonego przez  $8$ , i Sześciann dziesiątków; nie można przeto więcej dać Pierwiastkowi, iak  $3$  dziesiątki. Liczbę  $1920000$ , rozmnożoną przez  $30$ , to jest  $57600000$ , odjąwszy od  $78589719$ , zostanie  $20989719$ ; od tej reszty odjąwszy znowu kwadrat potrójny  $3$  dziesiątków, przez  $8$  rozmnożonych, to jest  $2160000$ , zostało  $18829719$ . A po odjęciu Sześciann dziesiątków, to jest  $27000$ , będzie wreszcie,  $18802719$ . Kwadrat potrójny części Pierwiastku znalezionej, to jest liczby  $830$ , jest  $2066700$ ; przez ten dzieląc resztę  $18802719$ , wypadnie  $9$  jednostki na wieloraz. Odiąwszy od tej reszty, liczbę  $2066700$ , rozmnożoną przez  $9$ , to jest:  $18600300$ , zostanie  $202419$ ; zkad znowu odjąwszy kwadrat potrójny jednostki  $9$ , rozmnożony przez  $830$ , to jest  $201690$ , zostało  $729$ . Naostatek Sześciann z  $9$  jest:  $729$ , a zatem Pierwiaszek którego szukaliśmy będzie  $839$ .

Wzor



Wzór działań w przykładach poprzedzających.

Przykład 1.

$$\begin{array}{r|l} 1,331 & 10. \\ 1\ 000 & \\ \hline \end{array}$$

Przykład 2.

$$\begin{array}{r|l} 68,921 & 40 \\ 64\ 000 & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 300 & 331 & 1. \\ & 300 & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 4800 & 4\ 921 & 1. \\ & 4\ 800 & \\ \hline \end{array}$$

31.

121.

30

120

1.

1

1

1

0

0

Przykład

Przykład 3.

$$\begin{array}{r}
 884,736 \mid 90 \\
 \hline
 729\,000 \mid \\
 \\
 24300 \mid 155736 \mid 6. \\
 \hline
 145800 \mid \\
 \\
 9936. \\
 \hline
 9720. \\
 \\
 216. \\
 216. \\
 \hline
 0.
 \end{array}$$

Przykład 4.

$$\begin{array}{r}
 590,589,719 \mid 800 \\
 \hline
 512\,000,000 \mid \\
 \\
 1920000 \mid 78589719 \mid 30. \\
 \hline
 57600000 \mid \\
 \\
 20989719. \\
 \hline
 2160000 \\
 \\
 18829719. \\
 \hline
 27000 \\
 \\
 2066700 \mid 18802719 \mid 9 \\
 \hline
 18600300 \mid \\
 \\
 202419 \\
 201690 \\
 \hline
 729 \\
 729 \\
 \hline
 0.
 \end{array}$$

Więcej takowych przykładów należy podać Uczniom, nie używając jeszcze żadnego skrócenia.

45. Pierwsze skrócenie, na tym zawisło, aby opuszczać zera, w liczbach dzielących, podzielnych, i w wielorazach; mając jednak zawsze uwagę na miejsca, które zastępować przypada cyfrom znaczącym. W szczególności zaś co do wielorazow. będzie ten z opuszczenia zerów pożytek, że zaraz przy takiej kłóć będzie można cyfry wyrażające pierwiastek, którego szukamy.

Drugie skrócenie, związane z pierwszym na tym się zasadza, aby do każdego następnego dzielenia, tyle tylko cyfr z Sześciannu przyłączać do reszty pozostałej, ile ich wyciągać będzie przypadające odejmowanie; daremna albowiem byłaby praca, przy każdym odejmowaniu, wszystkie pozostałe Sześciannu cyfry na nowo wypisywać, ponieważ ostatnie zwłaszcza cyfry przez większą część działania nie naruszone zostają.

Trzecie skrócenie na tym zawisło, aby za jednym razem odjąć kwadrat potrójny części znalezionej, rozmnożony przez część następującą; kwadrat potrójny tejże części drugiej, rozmnożony przez część pierwszą nalezioną, i Sześciannu  
tey

tey części drugiej. Tb zaś wykonasie, dodając razem te trzy liczby odeymować się mające, i tak dodane odeymując od Sześciannu, z którego Pierwiaszek wyciągamy. Zawsze jednak mieć trzeba nato uwagę, aby w liczbach, które pierwszy dodawać, a potem ich sumę odeymować mamy, zachowane było miejsce każdej cyfrze właściwe; iako też względ mieć należy na położenie cyfrów tych, od których inne odeymować przypada.

*Przysłowanie.* Niechby z liczby 257, 259, 456, trzeba wyciągać Pierwiaszek Sześcienny. Ten będzie miał cyfr trzy, Naywiększy Sześciann zawarty w 257, jest 216, którego Pierwiaszek jest 6. odjąwszy ten Sześciann od 257, zostanie 41. Do tey reszty przyłączmy następujący oddział 259, będzie 41259. Niemiając tym czasem względu na ostatnie dwie cyfry: 59, dzielną 412 przez potrójny kwadrat z 6, to jest przez 108, wieloraz będzie 3. Weźmy teraz sumę trzech liczb:  $3 \times 6^2$ , to jest kwadratu potrójnego z 6.  $27$  stów rozmnożonego przez 3 dziesiątki, kwadratu potrójnego z 3 dziesiątków rozmnożonego przez 6. stów, i Sześciannu z 3 dziesiątków. Sumę

mę 34047 odeymiemy od 41259, zostanie 7212; przy których przypisawszy ostatni oddział 456, będzie 7212456. Nie uważając tym czasem na ostatnie dwie cyfry, dzielimy 72124 przez kwadrat potroiny z części Pierwiaſtku znalezionej, to ieſt przez 11907, wypadnie 6, na wieloraz. Weźmy ſummę trzech liczb:  $7212456$  to ieſt kwadrat potroiny części  $216$  pierwew znalezionej, rozmnożony przez 6 iedności, kwadrat potroiny z 6. iedności rozmnożony przez część pierwey znalezionej, i Szeſcian z 6. iedności. Summa 7212456 równa ſię reſzcie ostatniej; co znakiem ieſt że Pierwiaſtek, którego ſzukaliſmy, ani mnieyſzy ani więkſzy ieſt, iak 636.

To działanie bardziey długie, niź trudne, wyciąga od uczniów częſtego w nim ćwiczenia ſię.

44. Aby wyciągnąć Pierwiaſtek Szeſcienny z ułomku, którego tak licznik, iako i mianownik ieſt Szeſcianem; trzeba go oſobno wyciągać z kaźdego z tych wyrazów. I tak Pierwiaſtek ſzeſcienny z  $\frac{12}{12}$ , ieſt: 2. Pierwiaſtek z  $\frac{27}{27}$ , ieſt: 3. Aby zaś wyciągnąć Pierwiaſtek Szeſcienny z liczby mieſzanej, trzeba



trzeba ją pierwey zamienić na ułomek. I tak Pierwiaſtki ſześciennie liczb mie-  
szanych  $3\frac{1}{2}$ ,  $37\frac{1}{7}$ , ſą te ſame co i u-  
łomków  $\frac{7}{2}$ ,  $\frac{260}{7}$ . to ieſt:  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{1}{7}$ , albo  
 $1\frac{1}{2}$ ,  $1\frac{1}{7}$ .

45. Co ſię o Pierwiaſtki kwadrato-  
wym powiedziało (w Części 1. Geom: §  
128) ſciągaſę i do Pierwiaſtku ſześciennego;  
to ieſt; że ieżeli nie można mieć  
Pierwiaſtku ſześciennego liczby całko-  
witey, w liczbach całkowitych, tedy  
go i w ułamkach nie znajdziemy. Do-  
wódzi ſię to ogólnie tymże ſamym, iak  
względem Pierwiaſtku kwadratowego  
ſpoſobem. (d)

46. Pierwiaſtek ſześcienny liczby ia-  
kiey, można tak do prawdziwego przy-  
bliżyć, iak tylko zechcemy. Spoſob  
nayogulnieyſzy ieſt; używając do tego  
ułamków dzieſiätnych. Niechby na-  
przykład trzeba z 2 wyciągnąć Pierwia-  
stek

---

(d) Otoż i drugi rodzaj ilości nie ſpół-  
miernych. Pierwſzego rodzaju ilości  
nieſpółmierne można Geometrycznie  
wyrazić; lecz wyrażenie tych drugich,  
wyżſzey nad początkową nauki potrze-  
buie.

stek sześcienny, przybliżając go do prawdziwego w cząstkach tyśiącznych. Wyciągamy ten Pierwiaszek, sposobem dopiero podanym, z liczby 2000000,000, a ostatnie trzy tego Pierwiaszku cyfry położymy za dziesiątne. Pierwiaszek Sześcienny liczby: 2000000000 w liczbach całkowitych najbliższych wyrażony, jest: 1259; a zatym Pierwiaszek Sześcienny liczby 2, przybliżony aż do części tyśiącznych iedności będzie 1,259. Jakoż Sześciann z 1,259, jest: 1,995616979 mniejszy od 2. a Sześciann 1,26, jest: 2,259576, większy od 2.

47. Chcąc Pierwiaszek sześcienny liczby nap: 2, przybliżyć do prawdziwego, w ułamkach zwyczajnych, podwoiwszy pierwsze dziewięć Sześciannów liczb *naturalnych*, 1,2,3,4. i t. d. uważać należy (podobnie jako się o przybliżeniu Pierwiaszku kwadratowego w Części I. powiedziało:) jeżeli między temi Sześciannami podwoionemi, nieznaudnie się taki, któryby bliżki bardzo był Sześciannu zupełnego. Znajdziemy nap: że 64. podwoione, to jest 128, mało się co różni od 125, to jest od Sześciannu liczby 5; a zatym 2, które równa się całe  $\frac{128}{125}$ ; będzie też prawie równe  $\frac{128}{125}$  przeto

przeto i Pierwiastek Sześcienny liczby 2, będzie prawie równy  $\frac{1}{2}$ . Aby zaś poprawić ten pierwszy mniej dokładny Pierwiastek Sześcienny, podzielimy różnicę między  $\frac{1}{2}$  i  $\frac{1}{3}$ , to jest,  $\frac{1}{6}$ , przez kwadrat potrójny tego pierwszego Pierwiašku to jest przez  $\frac{1}{8}$ , i wieloraz  $\frac{1}{5}$ , dodamy do Pierwiašku  $\frac{1}{5}$ ; Summa  $\frac{1}{2}$ , będzie Pierwiaškiem bardziey przybliżonym. Jakoż Sześcian z  $\frac{1}{2}$  jest  $2 \frac{1}{5} \frac{1}{5} \frac{1}{5}$ ; a i to uchybienie możnaby jeszcze zmniejszyć podobnym iak wyżej sposobem.

Niechby z liczby 3, trzeba wyciągnąć Pierwiastek sześcienny przez przybliżenie.

Liczba 3, równa się zupełnie  $\frac{1}{3} \frac{2}{3}$ , a niewiele się różni od  $\frac{1}{3} \frac{1}{3}$ ; a zatem Pierwiastek Sześcienny liczby 3, będzie prawie równy  $\frac{1}{3}$ , a poprawując to pierwsze uchybienie, Pierwiastek bardziey do prawdziwego przybliżony będzie  $\frac{1}{3} \frac{2}{3}$ .

48. Gdy ani licznik ani mianownik iakiego ułomku, nie jest Sześcianem; trzeba obadwa te wyrazy rozmnożyć przez taką liczbę, aby po rozmnożeniu, F miano,

mianownik stał się Sześcianiem; potem dopiero wyciąga się Pierwiaszek z licznika, przez przybliżenie, a wyciągnięty, dzieli się przez Pierwiaszek zupełny mianownika. I tak chcąc wyciągnąć Pierwiaszek sześcienny z  $\frac{1}{4}$ ; zamieniam ten ułamek na  $\frac{2}{8}$ ; a wyciągnawszy z 2. przez przybliżenie Pierwiaszek sześcienny: 2,259. -- biorę jego połowę 0,629 ---; to jest: dzielę go przez Pierwiaszek sześcienny mianownika 8; Podobnie Pierwiaszek Sześcienny z  $\frac{1}{12}$ , ten sam jest, co i Pierwiaszek Sześcienny z  $\frac{1}{24}$ ; to jest  $\frac{1}{4}$ . Pierwiastku sześciennego z 90.

## ROZDZIAŁ III.

### O Równoległoscianach prostokątnych (e).

49. *Defin:* Gdy Bryła iaka zakończona jest sześcią ścianami prostokątnymi, taka Bryła nazywa się *Równoległoscianem*.

(e) Częste używanie Równoległoscianów prostokątnych jest nam pobudką do mówienia o nich w szczególności: tym bardziej, że przez to przysposobią się Uczniowie do zamieniania z większą łatwością innych nie prostokątnych Równoległoscianów na prostokątne.

ległoscianem prostokątnym (Parallelopi-  
pedum Rectangulum).

50. *Twierdz. I.* W każdym Równoległoscianie prostokątnym, Ściany na przeciwko siebie stojące, są równe i równoodległe; a każda z tych ścian w szczególności prostopadłą jest, do każdej z czterech innych ścian, które z nią spólny mają bok jeden.

Niech będzie ABCDEFGH, Równoległoscian prostokątny; Spolne dwóch ścian: GBCF, GBAH przecięcie GB, prostopadłym jest do dwóch innych boków: BC, BA należących do tychże Ścian, więc to przecięcie jest też prostopadłym i do płaszczyzny przechodzącej przez linię AB, BC, to jest do ściany ABCD. Płaszczyzny zatym ABGH, BCFG, które przechodzą przez to spolne przecięcie GB, są do ściany ABCD, prostopadłe. Toż mówić i o dwóch drugich ścianach, których spólnym przecięciem jest linia ED; a zatym cztery ściany Równoległoscianu prostokątnego, są prostopadłe do tej ściany, z którą mają po jednym boku spólnym.

Dowiedliśmy że linia GB, prostopadłą jest do ściany ABCD. Podobnie do-  
Fajciecie.



wieśćby można, że taż linia jest prostopadłą i do ściany GFEH; więc te obie ściany są prostopadłe do iedney linii GB, a zatem są od siebie równoodległe.

Na ostatek w Prostokącie ABGH linie przeciwne AB, GH są równe; iako też i linie BC, FG, a zatem dwie przeciwne ściany ABCD, EFGH, mogą przystać do siebie.

**51. Uwaga.** Ponieważ w Równoległościannie prostokątnym z czterech ścian otaczających ten Równoległościann, każda ma ieden bok spólny z bokiem iedney ściany z dwóch pozostałych; przeto można wystawić sobie *rodzenie się* (generatio albo formatio) Równoległościannu prostokątnego, w sposób następujący.

Niech będzie Prostokąt iakikolwiek, na którego wierzchołkach wszystkich wystawione są prostopadłe do iego płaszczyzny wszystkie równe. Niech ten Prostokąt posuwa się równoodległe od pierwszego swego położenia, itak, aby wierzchołki kątów iego wzdłuż linii prostopadłych wznosiły się. Mieysce to, które takowym posuwaniem się

przy-

przejdzie Prostopadły, będzie Równoległością prostopadłą.

52. *Defin:* Równoległością prostopadłą, którego wszystkie ściany są kwadratami, nazywamy *Sześcianem*, albo z *Lacińskiego, Kubusem*.

Sześcian więc, jest to Bryła zakończona sześciu kwadratami. Wypływa zaś z Twierdzenia poprzedzającego, że te 6 kwadratów, są równe, że każde z nich dwa, na przeciwko siebie stojące, są równoodległe, i że cztery z tych kwadratów wspierające się na czterech bokach kwadratu jednego z dwóch kwadratów pozostałych, są do tego kwadratu prostopadłe.

Wystawiwszy sobie Równoległością prostopadłą, jako zbudowany na jednej z ścian swoich, prostopadła spuszczone na tę ścianę, od punktu któregokolwiek ściany przeciwny, nazywa się *wysokością* tego Równoległością. Ta zaś wysokość równa jest wspólnemu przecięciu dwóch ścian zbudowanych na dwóch przyległych sobie bokach podstawy.

53. *Twier:*

53, *Twierdź. 2.* Gdy podstawy dwóch Równoległościanów mogą przyśtać do siebie, a ich wysokości są równe, te dwa Równoległościany, mogą też przyśtać do siebie, to jest nie różnią się od siebie tylko miejscem.

*Dowódz:* Wszystkie ściany tych dwóch Równoległościanów, podobnie położone, mogą przyśtać do siebie; wszystkie też tych Równoległościanów kąty bryłowe, składają się z trzech kątów prostych, a zatem wszystkie te kąty bryłowe mogą przyśtać do siebie. Przeniozszy tedy myślą jeden z tych Równoległościanów, tak, aby jeden z kątów jego bryłowych, przyśtał do jednego z kątów bryłowych Równoległościanu drugiego, i aby ściany pierwszego kąta, które mogą przyśtać do ścian drugiego, w samej rzeczy do niego, przyśtały, wszystkie końce krawędzi pierwszego kąta, przyśtaną do końców krawędzi odpowiadających przy drugim kącie; a przeto i wierzchołki kątów bryłowych pierwszego Równoległościanu, które są przy końcach, tych krawędzi, przypadną na wierzchołki kątów bryłowych drugiego Równoległościanu, będące przy końcach tychże ścian odpowiadających

pierwszym; zatym i te kąty bryłowe przystaną iedne do drugich:

54. *Wniosek.* Podzieliwszy wysokość iakiego Równoległościanu prostokątne-  
go na pewną liczbę części równych, a  
przez te wszystkie punkta podziału prze-  
ciągnąwszy płaszczyzny równoodległe  
od podstawy; Równoległościan po-  
dzielony będzie na tyle Równoległościa-  
nów mniejszych, które przystać do sie-  
bie mogą, na ile części była podzielona  
wysokość; będą albowiem miały te  
wszystkie Równoległościany mniejsze,  
iednakową wysokość, a takie podstawy,  
z których każda przystać może do pod-  
stawy wielkiego Równoległościanu.

55. *Twierdź; 3.* Dwa Równoległo-  
ściany prostokątne, wystawione na tey-  
że samey podstawie, lub na podstawach  
mogących przystać do siebie, tak się ma-  
ją ieden do drugiego, iak ich wysoko-  
ści.

*Dowódz:* 1. Gdyby wysokość iedne-  
go, Równoległościanu, była dwa, trzy,  
cztery i t. d. razy większa od wysoko-  
ści drugiego, pierwszy Równoległo-  
ścian, mógłby się podzielić na 2, 3, 4,  
i t. d.

i t. d. Równoległościany mogące przystać do drugiego; a zatem ten pierwszy Równoległoscian byłby też większy od drugiego, 2, 3, 4, i t. d. razy. Co przystosować można, i w innych przypadkach, gdzieby tylko wysokość iednego Równoległoscianu zawierała w sobie zupełnie wysokość drugiego.

2. Gdyby zaś wysokość iednego Równoległoscianu zawierała nap. 3. takich części; iakich 5 zawiera wysokość drugiego; w takim razie, podzieliwszy pierwszą wysokość na trzy, a drugą na pięć równych części, a przez punkta podziału przeciągnąwszy płaszczyzny równo odległe od podstaw, podzieliłibyśmy pierwszy Równoległoscian na 3, a drugi na 5. Równoległoscianów iednakowey wysokości, i których podstawy przystaćby mogły do siebie; a zatem pierwszy Równoległoscian takby się miał do drugiego iak 3, do 5, to jest iak wysokość pierwszego do wysokości drugiego. Rozumowanie to służy i do innego iakiegokolwiek stosunku.

Na koniec, to, co się powiedziało w przypadkach spólnierych, przystosować można i do przypadków nie spólnierych.



miernych, tak iakośmy uczynili mówiąc  
o figurach płaskich, w Części I.

Jakoż niech będą  $AB$ ,  $CD$  wysokości *Tab. II.*  
dwóch Równoległościaków prostoką- *Fig: 5.*  
tnych, zbudowanych na teyże samey  
podstawie, albo na podstawach mogą-  
cych do siebie przyrastać; i niech te wyso-  
kości będą niespołmierne; wszelako  
dwa takie Równoległościaki mieć się do  
siebie będą, iak ich wysokości.

Gdyby albowiem stosunek tych dwóch  
Równoległościaków nie był równy sto-  
sunkowi ich wysokości, tedy jedna z tych  
wysokości, byłaby nadto mała douczy-  
nienia tey równości stosunków. Niechże  
więc jeżeli to być może, stosunek pier-  
wszego Równoległościaku, do drugie-  
go, będzie równy stosunkowi linii  $AE$ ,  
(większej, od  $AB$ ) do  $CD$ .

Podzielmy linią  $CD$  na pewną liczbę  
części równych mniejszych jednak od  
różnicy  $BE$ , i przenieśmy jedną z tych  
części na linią  $AB$ ; tyle razy, ile mo-  
żna; ostatni punkt podziału padnie mię-  
dzy  $A$  i  $B$ , a przeniosłszy dalej ku  $E$ ,  
jedną jeszcze taką część, punkt podzia-  
łu padnie między  $B$  i  $E$ , nap. w  $F$ .

Ro-

Równoległościany mające jednakowe podstawy, a wysokości spólnierne CD, i AF, będą do siebie iak te wysokości CD i AF.

Aże (przez przypuszczenie) Równoległościan, którego wysokością jest AB, tak się ma do Równoległościanu, którego wysokością jest CD, iak się ma linia AE do linii CD.

Więc (przez złożenie stosunków) Równoległościany, których wysokościami są AB, i AF, miałyby się do siebie, iak linie AE, i AF, Ze zaś pierwszy poprzednik mniejszy jest od swego następnika, a drugi poprzednik większy od swego następnika, więc proporeya ta niema miejsca, a zatym stosunek Równoległościanów, których AB, i CD, są wysokościami, nie jest różnym od stosunku tychże wysokości.

To samó wkrótkości tak się wyraża: Niech będą oznaczone przez R.AB, R.AF, R.CD, Równoległościany mające jednakowe podstawy, wysokości zaś: AB AF, CD.

Gdyby można uczynić tę proporeyą:

$$R. AB : R. CD = AE : CD.$$

tedy ponieważ jest; -- R. CD : R. AF = CD : AF.

byćby powinno -- R. AB : R. AF = AE : AF.

Ta zaś ostatnia proporcya utrzymać się nie może, więc ani pierwsza.

56. *Twierdz. 4.* Dwa Równoległościany, mające jednakowe wysokości, są do siebie, iak ich podstawy.

Przenieśmy ieden z tych Równoległościanów, tak, aby podstawa jego stykała się w wierzchołku spólnym, z drugą podstawą. Niech ABCD będzie jedną z tych podstaw, a drugą: EBGF. Dopełniwszy Prostokąta, CBGH przedłużwszy boki, DC, FG, aż do ich spólnego przecięcia, w punkcie H; i wystawmy sobie wmyśli Równoległościan trzeci staący na podstawie CBGH, dawszy mu wysokość równą wysokości, iednakowej dwóch danych Równoległościanów. Równoległościan, którego podstawa jest: ABCD, i ten, którego podstawa jest: CBGH, wystawiającie sobie iak gdyby miały za podstawę prostokąt, którego iednym bokiem byłaby linia CB, a drugim, wysokość spólna obydwóch danych Równoległościanów; te mówię Równoległościany są do siebie iak ich wysokości AB, i BG, albo iak Prostokąty ABCD i CBGH.

Tab. II.  
Fig. 6.

Podobnie Równoległościany, których, CBGH, i BEFG, są podstawami, uważane,

ne, iak gdyby miały za podstawę Prostokąt, którego iednym, bokiem byłaby linia BG, a drugim spólna wysokość dwóch danych Równoległościaków są także do siebie, iak ich wysokości, BC, BE, albo iak Prostokąt, CBGH, do Prostokąta BEFG.

Więc (przez złożenie stosunków) Równoległościaków, którego podstawą iest ABCD, tak się ma do Równoległościaku, którego podstawą iest BEFG, iak się ma pierwsza podstawa do drugiej.

*Krócej to samo.*

Niech Równoległościaki, których podstawami są Prostokąty: ABCD, CBGH, BEFG, będą oznaczone wyrazami następującymi: R. ABCD, R. CBGH, R. BEFG.

1. proporcya,

$$R. ABCD : R. CBGH = ABCD : CBGH.$$

2. proporcya;

$$R. CBGH : R. BEFG = CBGH : BEFG.$$

więc - - - - -

$$R. ABCD : R. BEFG = ABCD : BEFG.$$

57. Wnio-

*Wniosek 1.* Dwa Równoległościany prostokątne, jeżeli mają równe tak wysokości, jak i podstawy, są równe; także, jeżeli równe dwa Równoległościany prostokątne, mają równe podstawy, równe będą i ich wysokości; albo jeżeli równe mają wysokości, równe będą i ich podstawy.

58. *Wniosek 2.* Można zawsze zamienić, albo w myśli zamienionym sobie wyślawić Równoległościę jeden prostokątny, na drugi, jednakową z nim wysokość mający, a któryby za podstawę miał Prostokąt, z jednym bokiem danym; to się zaś stanie, zamieniając podstawę Równoległościę danego, na Prostokąt, w któryby wchodził ten bok dany.

59. *Twierdź. 5.* Dwa Równoległościany prostokątne, jeżeli mają podstawy w stosunku odwrotnym ich wysokości, są równe; i wzajemnie, jeżeli dwa Równoległościany są równe, będą podstawy ich, w stosunku odwrotnym ich wysokości.

Niech będzie ABCD podstawa, a BI *Tab. II.*  
wysokość Równoległościę jednego *Fig. 6.*  
Prosto-



prostokątnego ; drugiego zaś Równoległoscianu niech będzie podstawa BEFG, a wysokość BL.

1. Niech zachodzi ta między podstawami y wysokościami proporcya:

$ABCD : BEFG = BL : BI$ , tedy te Równoległosciany będą równe.

Wystawmy sobie drugi Równoległoscian, iakoby zamieniony na inny teyże samey wysokości BL, a mający za ieden bok swoiey podstawy, bok nap: BC, należący do podstawy pierwszego Równoległoscianu, i niech będzie tego nowego Równoległoscianu podstawa CBMN.

Będzie zatym podstawa ABCD do podstawy BEFG. iak AB do BM; a żeśmy też przypuścili  $ABCD : BEFG = BL : BI$ , więc będzie  $AB : BM = BL : BI$ , a zatym Prostokąt mający za boki, AB, BI. równy będzie Prostokątowi mającemu za boki: BM, BL: Ze zaś pierwszy i trzeci Równoległoscian mają za podstawy te dwa równe Prostokąty, i spólną przytym mają wysokość BC, więc są sobie równe. A że trzeci Równoległoscian równy jest drugiemu, więc i pierwszy równy także będzie drugiemu.

2. Niech

2. Niech Równoległoscian, którego ABCD jest podstawą, a BI wysokością, będzie równy Równoległoscianowi, którego podstawą jest BEFG: a wysokością BL; idzie zatem że,  $ABCD: BEFG = BL: BI$ .

*Zrobmy to samo co wyżej wykreślenie.*

Uważając pierwszy i trzeci Równoległoscian, jako mające za wysokość wspólną, LC, będzie pierwszy do trzeciego jak Prostokąt,  $AB \times BI$  do Prostokąta  $BM \times BL$ . A że te dwa Równoległosciany są (przez przypuszczenie, albo wykreślenie) równe drugiemu, więc i sobie są równe, więc  $AB \times BI = BM \times BL$ ; a zatem  $AB: BM = BL: BI$ . Ze zaś  $AB: BM = ABCD: CBMN = ABCD: BEFG$ ; więc  $ABCD: BEFG = BL: BI$ .

60. *Wniosek.* Z tego wszystkiego co się powiedziało, wynika sposob znalezienia dwóch linii, które były do siebie w stosunku dwóch Równoległoscianów zawierających boki dane.

*Przykład.* Mając dany Sześciątórównoległoscian prostokątny, znaleźć linię taką, aby stosunek Sześciątórównoległoscianu do Równoległoscianu

wnoległościanu równy był stosunkowi boku Sześcianu do tey linii.

Niech będzie S bok Sześcianu, P, Q, R, boki trzy Równoległościanu. Zamieſnimy navprzod Proſtokąt, którego bokami ſą P, i Q na inny, któryby miał za bok ieden, bok Sześcianu; to ieſt ſzukaymy czwartey proporcjonalney do S, P, i Q; Niech będzie L, tą czwartą proporcjonalną. Równoległościan dany, równy będzie innemu, któryby miał za boki: S, L, R; a zatym ſtośunek Sześcianu do Równoległościanu danego, równać ſię będzie ſtośunkowi kwadratu  $S^2$  do Proſtokąta  $L \times R$ . Zamieſnimy znowu ten drugi Równoległościan równy danemu, na inny, któryby znowu miał S za bok ieden, to ieſt ſzukaymy czwartey proporcjonalney do S, L, i R. Niech będzie M, tą czwartą proporcjonalną: Równoległościan drugi, a zatym i pierwszy dany, iemu równy, równać ſię będzie trzeciemu, któryby miał za boki: S, S, M; więc ſtośunek Sześcianu do Równoległościanu danego, równać ſię będzie ſtośunkowi kwadratu  $S^2$  do proſtokąta  $S \times M$ , to ieſt ſtośunkowi S, do M.

Aby tedv znaleźć w liniach, ſtośunek Sześcianu do Równoległościanu, proſtokątne.

kątnego, trzeba 1°. do boku Sześciannu, i do dwóch boków Równoległościannu szukać czwartey proporcjonalney; 2°. trzeba znowu do tegoż boku trzeciego, Równoległościannu, i do czwartey proporcjonalney dopiero znaleźć ney, szukać inney czwartey proporcjonalney; a stosunek boku Sześciannu, do tej ostatney linii, równy będzie stosunkowi Sześciannu do Równoległościannu.

Jdzie zatem, że jeżeli mamy dwa Równoległościanny prostokątne, będziemy mogli wyrazić w liniach ich stosunek, szukając w liniach stosunku tychże Równoległościannów do jakiego Sześciannu; wzięwszy albowiem bok tego Sześciannu, za poprzednika, każdego z tych stosunków; stosunek ich następników, wyrażać będzie stosunek w liniach, tych dwóch Równoległościannów.

61. *Uwaga.* Wszystko to, co się powie ziało o przyrównywaniu, albo mierze Geometryczney Równoległościannów prostokątnych, zgadza się zupełnie z nauką podaną w Arytmetyce o przyrównywaniu liczebnym Równoległościannów.

G

Przy-

*Przykt.* Niech iedność wyraża bok Sześcianu wziętego za miarę do przyrównywania; a niech boki Równoległoscianu, który chcemy do Sześcianu przyrównywać, zawierają ten bok Sześcianu kilka razy oznaczonemi przez liczby nap. 5, 7, i 9. Czwarta proporcjonalna do boku Sześcianu, i do dwóch pierwszych boków Równoległoscianu wyrazi się przez liczbę 35, to jest zawierać będzie bok Sześcianu, razy 35; czwartą zaś drugą proporcjonalną, do tegoż boku Sześcianu, do trzeciego boku Równoległoscianu i do pierwszej czwartej proporcjonalnej, wyrazi liczba 315; to jest zawierać ta będzie bok sześcianu, razy 315. A zatym Równoległoscian, zawierać będzie w sobie Sześcian razy 315; to jest, wzięwszy Sześcian za iedność albo spólną miarę; ten Równoległoscian wyrazi się przez liczbę 315, która podług wykreślenia pochodzi z rozmnożenia liczb 5, 7, i 9.

+ 62. *Defn.* Gdy cztery takie mamy linie, że stosunki, pierwszej do drugiej, drugiej do trzeciej, trzeciej do czwartej są równe, o takich liniach mowi się, że są ciągłe (continue) proporcjonalne.

*Przykłady*



*Przykłady liczebne.* Cztery liczby: 1, 2, 4, 8, nazywają się ciągiem proporcjonalnymi, a cztery linie, któreby tak się do siebie miały, iak te cztery liczby nazywałyby się też ciągiem proporcjonalnymi. Toż mówić i o liczbach, 8, 12, 18, 27, z których każda zawiera w sobie, poprzedzającą jeden raz i pół, i t. d.

Stofunek pierwszey z tych linii, do czwartey, składa się z stofunku, pierwszey do drugiey, drugiey do trzeciey, i trzeciey do czwartey (a to przez definicyą stofunku składanego). Ze zaś wszystkie te szeregowe stofunki są równe, więc stofunek pierwszey tey linii do czwartey, składa się z 3 stofunków równych, ma zaś nazwisko stofunku *troymnożnego* (ratio triplicata) i pierwsza ta linia do czwartey, będzie w stofunku tróymnożnym.

63. *Przystosowanie.* Niechby Równoległoscian, który wymierzać mamy przez Sześcian wzięty za iedność, był i on sam Sześcianem.

Niech będzie AB bok Sześcianu małą. *Tab. 11.*  
cego służyć za miarę: AC bok Sześcianu *Fig. 7.*  
który wymierzyć mamy. Szukaymy do AB, i AC, trzeciey proporcjonalney AE

Gz (kreśląc

(kresząc Trójkąt prostokątny ABC, mający, AB-za jedno ramie kąta prostego, a AC zaprzeciwprostokątną; i wystawując do linii AC, w punkcie C, prostopadłą CE, aż do iey spotkania się w E, z linią AB przedłużoną.) Szukaymy daley do AB, AC, AE, czwartey proporcjonalney, AF) wyprowadzając od punktu E linii AE, prostopadłą EF, aż do iey spotkania się w punkcie F z linią AC przedłużoną.) Pierwszy Sześcian, wzięty za miarę, tak się będzie miał do Sześcianu, który wymierzać przypada, iak linia AB, do linii AF; to iest: iak linia pierwsza do czwartey z linii ciągiło proporcjonalnych; z których pierwszych dwóch iedna iest bokiem Sześcianu wziętego za miarę, a druga bokiem Sześcianu wziętego do wymierzenia; a zatym stosunek pierwszego Sześcianu do drugiego iest tróymnożnym stosunku ich boków.

I tak, ieżeli bok Sześcianu iakiegokoltryrazy, zawiera w sobie bok Sześcianu wziętego za miarę, Sześcian pierwszy będzie do drugiego; iak  $3 \times 3 \times 3$  do 1, albo iak 27, do 1; to iest ieżeli linia AC zawiera w sobie razy trzy linia AB; linia też AE zawierać będzie trzy razy linia AB; linia też AE zawierać będzie trzy razy 3 linia

linią AC, a zatym 9 razy liniją AB, a linija AF zawierać będzie 3 razy liniją AE, atym samym 27 razy liniją AB.

64. *Wzajemnie.* Gdy trzeba znaleźć Sześcian, któryby do drugiego był w stosunku danym, i takim, któryby się równał stosunkowi boku Sześcianu tego drugiego, do linii danej; bok Sześcianu, którego szukamy, ma być drugą liniją z czterech ciągle proporcjonalnych, między którymi pierwsza z czwartą, są w danym stosunku; to jest: bok ten szukany, ma być liniją pierwszą z dwóch średnich ciągle proporcjonalnych między pierwszą i czwartą.

Zagadnienie to, nie może być rozwiązane przez Geometrią początkową, chyba trójkątem przez doświadczanie i szukanie niepewne; do dokładnego i pewnego rozwiązania, potrzeba iedney przynajmniej z linii krzywych, nazwanych *przecięciami konicznymi* (*sectiones conicae*) o których się potym namieni. I toć to zagadnienie o znalezieniu dwóch średnich proporcjonalnych, pierwszym powodem być musiało Geometrom, do uważania, tych linii krzywych dopiero wspomnianych, i do uczynienia pierwsze-

go kroku w wyższej Geometrii. Gdy się w *Delos* radzono Wyroczni, coby za sposób był ziednania Bogów zagniewanych, i odwrócenia zarazy powietrza niszczącego Państwo Attyckie; miał się dać głos słysz-ć: aby *dwumnożono ołtarze* (*duplicentur Altaria*) Po wielu niepożytecznych zawodach, postrzeżono na koniec, iż trzeba było znaleźć bok Sześciannu dwa razy tak wielkiego, iak drugi wzięty za spólną miarę; to jest: iż trzeba było wynaleść pierwszą z dwóch średnich Geometrycznych, między dwiema liniami, z których jedna dwa razy w sobie zamykałaby drugą.

65. W Arytmetyce; gdy stosunek dany, jest stosunkiem liczby iedney Sześcianney, do drugiey także Sześcianney, rozwiązać można dokładnie to zagadnienie. Tak nap: gdyby dwa Sześcianny miały być do siebie, iak 1. do 8; albo iak 1 do 27, albo iak 8 do 27. i t. d. boki ich byłyby ieden do drugiego, iak 1. do 2, albo iak 1. do 3, albo iak 2, do 3. i t. d.

Ale gdy stosunek dany nie jest stosunkiem dwóch liczb Sześciennych, rozwiązanie będzie tylko do prawdziwego przybliżone. Itak, gdy Sześciann ieden,

ma być dwa razy tak wielki, iak drugi, wziąwszy bok tego drugiego, za jedność, bok pierwszego powinienby być wyrażony przez liczbę taką, której Sześciannem, iest 2; a zatem pierwiastek Sześcienny, liczby 2, wyrażałby ten bok; Pierwiastek zaś ten przybliżony, iest 1,26 to iest bok mniejszego Sześciannu, tak-by się miał do boku Sześciannu dwa razy tak wielkiego, iak 1, do 1,26, albo iak 100, do 126. albo ieszcze dokładniej iak 23, do 29.

66. *Uwaga.* Gdy stosunek dwóch linii iest dany; dany iest tym samym i stosunek ich Sześciannów.

Tak albowiem mieć się będą do siebie te Sześcianny, iak linia pierwsza do czwartej ciągle proporcjonalnej, wziąwszy za pierwsze dwa wyrazy tej proporcji dwie linie których stosunek iest dany.

Zkąd wypada wniosek następujący:

67. Gdy cztery linie są w proporcji, ich Sześcianny w proporcji też będą; to iest; gdy stosunek dwóch pierwszych linii równa się stosunkowi dwóch drugich; stosunek też Sześciannów z dwóch pier-



pierwszych linii, równać się będzie stosunkowi Sześciannów z dwóch drugich linii.

W Arvmetryce: cztery liczy: 2, 3, 8, 12  
składają proporcją

ich Sześcianny: - - 8, 27, 512, 1728,  
składają także proporcją.

68 Uwaga. Podanie zamknięte w tym wniosku, jest tylko wyszczególnieniem podania następującego:

Niech będą trzy jakiekolwiek proporcye, i cztery takie Równoległościanny proste katne; aby krawędzie pierwszego Równoległościannu, były trzema poprzednikami trzech pierwszych stosunków, krawędzie drugiego, trzema następnikami tychże trzech pierwszych stosunków, krawędzie trzeciego, trzema poprzednikami, trzech drugich stosunków, a krawędzie czwartego, trzema następnikami tychże trzech drugich stosunków; stosunek pierwszych dwóch Równoległościannów równy będzie stosunkowi dwóch ostatnich.

Trzeba nayprzod to podanie objaśnić na przykładach liczebnych.

W ogul

W ogulności zaś niech będą trzy iakie-  
kolwiek proporcye:  $A : B = C : D$ .

$$a : b = c : d.$$

$$a : b = c : d.$$

Zamieſmy ſtoſunek  $A$  do  $B$  na inny  $b$   
do czwartej linii  $E$ : Zamienmy podo-  
bnie i ſtoſunek  $C$  do  $D$  na inny  $d$ , do  
czwartej linii  $e$ .

Będą podſtawy drugiego i czwartego  
Równoległościanu równe proſtokątom  
 $B \times b$ , i,  $D \times d$ ; a zatym podſtawy dwóch  
pierwſzych Równoległościanów będą ſię  
miały, do ſiebie iak  $a$  do  $E$ , a podſtawy  
zaś dwóch drugich Równoległościanów  
będą ſię miały do ſiebie iak  $c$  do  $e$ .

A że przez przypuſzczenie i wykreśle-  
nie ſtoſunki;  $A$  do  $B$ ,  $b$  do  $E$ ,  $C$  do  $D$ ,  $d$   
do  $e$ , ſą wſzyſtkie równe,

więc  $b : E = d : e$ .

Ze zaś  $a : b = c : d$

więc  $a : E = c : e$ .

A zatym ſtoſunek podſtaw Równole-  
głościanów dwóch pierwſzych, równy  
ieſt

jest stosunkowi Równoległościaków  
dwóch drugich.

Jeżeli z przypuszczenia; -

$$a : b = c : d$$

więc Prostokąty  $aa, Eb, cc, ed$  skła-

dać proporcją; a zatem cztery Równoległościaki; któreby te Prostokąty miały za podstawy, i z których dwa pierwsze miałyby spólną wysokość  $A$ , dwa zaś drugie wysokość  $C$ , byłyby także z sobą w proporcji, Aże pierwszy z tych Równoległościaków miałby za krawędzie trzy linie:  $A, a, a$ , drugi zaś równałby się temu, któryby miał za krawędzie trzy linie:  $B, b, b$ ; a to dla tego, że są równe Prostokąty:  $B \times b$  i  $A \times E$  trzeci z tych Równoległościaków miałby za krawędzie, trzy linie:  $C, c, c$ , a czwarty równałby się temu, któryby miał za krawędzie, trzy linie:  $D, d, d$ ; więc te cztery Równoległościaki byłyby w proporcji.

# ROZDZIAŁ IV.

## O Równoległościanach nie prostokątnych.

69. *Defin.* Bryła zakończona 6 ścianami parzysto równoległemi, nazywa się *Równoległościanem* a zatym Równoległościany prostokątne, o których w Rozdziale poprzedzającym mowa była, są pewnym gatunkiem Równoległościanów.

70. *Twierdz. 1.* W Równoległościanie, wszystkie ściany są Równoległobokami; każde zaś dwie ściany przeciwne, mogą przystać do siebie.

Niech będzie Równoległościan *Tab. III* ABCDEFGH; wszystkie jego ściany są *Fig. 1* Równoległobokami, a ściany przeciwne: ABCD, EFGH mogą do siebie przystać.

*Dowodz:* Ponieważ płaszczyzny równoodległe ABCD, GHFE, są przecięte trzecią płaszczyzną BGFC, więc ich wspólne przecięcia BC, FG z tą płaszczyzną, są równoodległe. Takż pokazać można, że linie HE, GF są równoodległe, i linie: HG, EF równoodległe; a zatym  
że

że ściana HGFE jest Równoległobokiem. Podobnie i wszystkie inne ściany są także Równoległobokami.

W szczególności zaś, linie: BA, GH, i linie BC, GE, są od siebie równoodległymi; więc równe są kąty ABC, HGF. A że linie BA, GF, i BC, GE są równe, więc Równoległoboki, ABCD, HGFE, mogą przysłać do siebie. Toż mówić o każdej innej parze ścian przeciwnych,

71. Ztąd też wystawić sobie można każdy Równoległościan, iakoby utworzył się następującym sposobem:

Niech będzie iakikolwiek Równoległobok; a od iednego z iego wierzchołków wyciągniemy linią czyniącą z iego płaszczyznę, kąt iakikolwiek; wyciągniemy potem i przez drugie wierzchołki, linie równoodległe od pierwŹzey, i zrobmy wszystkie sobie równymi. Niech nakońiec ten Równoległobok poŹywa się równoodległe od pierwŹzego Źwego połoŹenia, i niech wierzchołki iego nie sŹchodzą nigdy z linii równoodległych, mieysce od Równoległoboków, tym sposobem przebyte, będzie Równoległościanem.

72. Twierdz:



**72. Twierdz. 2.** Dwa Równoległości-  
ściany mogą przystać do siebie, gdy i  
wszystkie ich odpowiadające sobie ścia-  
ny przystać do siebie mogą, i gdy kąty  
ich bryłowe także sobie odpowiadające,  
robią się z kątów równych należących  
do tychże ścian.

Niech będą dwa Równoległości-  
af, których wszystkie ściany odpowiada- *Tab: III*  
jące sobie w jednym i w drugim Równ- *Fig: 1a*  
ległości- i 22.  
ścianie, mogą przystać do siebie, i  
których kąty bryłowe także sobie odpo-  
wiadające nap: A, i a, robią się z r-  
ównych kątów tychże ścian; te dwa R-  
ównoległości-ściany przystać do siebie mo-  
gą.

*Dowodz:* Ponieważ kąty bryłowe,  
A, i a, robią się z równych względem  
siebie kątów płaskich, więc przystać do  
siebie mogą. Przeniosłszy tedy Równ-  
ległości-af, tak aby kąt bryłowy a,  
przystał w rzeczy samej do kąta bry-  
łowego A; ponieważ i kąty płaskie, z  
których się te bryłowe robią, przystają  
jedne do drugich sobie równych; a lini-  
ie ab, ad, ah, są równe względem linii  
AB, AD, AH; więc punkta: b, d, h, przy-  
stają do punktów: B, D, H, i ściany tak-  
że

że czyniące dwa kąty bryłowe  $a$ , i  $A$ , przystaną iedne do drugich; a zatym i punkta:  $c, g, e$ , przystaną do punktów odpowiadających sobie:  $C, G, E$ ; a wszczegulności linii:  $bc, bg$ , przystaną do linii:  $BC, BG$ . Więc i płaszczyzna przechodząca przez linii:  $bc, bg$ , leżąc będzie na płaszczyźnie przechodzącej przez linii  $BC, BG$ . Ze zaś przypuściliśmy iż ściana  $befg$ , przystać może do ściany  $BCFG$ , więc punkt  $f$ , przystanie do punktu  $E$ .

Tymże sposobem okazać można, że i wszystkie inne ściany, i kąty Równoległościanu  $af$ , przeniesionego, przystaną do innych ścian i kątów Równoległościanu  $AF$ , a zatym te dwa Równoległościany przystać do siebie mogą.

73. *Uwaga.* Tymże cale sposobem dowodzi się, że dwie iakiekolwiek Bryły, przystać mogą do siebie, gdy wszystkie kąty ich bryłowe odpowiadające sobie, przystać także do siebie mogą, i gdy ściany iedney Bryły przystać mogą do ścian odpowiadających w drugiej Bryle.

74. *Definicje.* Uważając Równoległościan iakoby zbudowany na iedney z ścian swoich, ta ściana nazywa się, *podstawą* jego; a prostopadła od punktu któregokolwiek ściany przeciwney, do tej

spu-

spuszczona, nazywa się *wysokością* tego Równoległościanu.

Gdy ściany zbudowane na bokach podstawy, są do niej prostopodłemi, taki Równoległościan nazywa się *prostym* (Parallelopipedum rectum) Równoległościany prostopadłe, są gatunkiem Równoległościanów prostych, w których podstawa nawet sama jest prostopadłem.

75. *Twierdz. 3.* Dwa Równoległościany równe są w bryłowości (soliditas) gdy mają jednakową wysokość, i na teyże samey są zbudowane podstawie, a dwie ich ściany, na iedney płaszczyźnie znajdujące się, stoją na tymże samym boku podstawy.

Niech będą dwa Równoległościany: *Tab. III*  
ACGE. i ACLI. zbudowane na teyże samey podstawie AC; i niech dwie ich ściany, AG, AL znajduią się na teyże samey płaszczyźnie; te dwa Równoległościany, są równe w bryłowości. *Fig. 3*

*Dowodz.* Dwie Bryły: A D I E H M, BCKFGL, mają takie wszystkie ściany odpowiadające sobie, iż iedne do drugich przystać mogą; wszystkie podobnie kąty  
ich

ich bryłowe przyśtać mogą do siebie. Jakoż Trójkąt HAM, może przyśtać do Trójkąta GBL, a wszczegulności kąty HAM, GBL, są równe. Równoległobok HADE przyśtać może do Równoległoboku: GBCF sobie przeciwnego, w pierwszym Równoległoscianie, a wszczegulności kąty: HAD, GBC, są równe; Równoległoboki także: MADI, LBCK przeciwnie sobie, w drugim Równoległoscianie, mogą do siebie przyśtać, a wszczegulności kąty: MAD, LBC, są równe, więc kąty bryłowe A, B, iściany tych kątów mogą przyśtać do siebie. Toż mówić i o wszystkich innych kątach bryłowych, i o wszystkich innych, tych dwóch Brył, ścianach. Zaczynam te dwie Bryły przyśtać mogą do siebie, i są równe sobie w bryłowatości. Aże od całej Bryły ACLE odiawszy pierwszą z Brył wyżej wyrażonych, ADIEHM, zostaje się Równoległoscian ACLI a odiawszy od tejże całej Bryły ACLE, drugą Bryłę BCKEGL, zostaje się Równoległoscian ACGE; więc te dwa Równoległosciany są równe. (f)

(f) To dowodzenie jest ogólne, i rozciąga się do takiegożkolwiek położenia linii MI; czyli by punkt M przypadł na punkt

76. *Twierdza. 4.* Dwa Równoległości-  
ny są równe w bryłowości, gdy iedna-  
ką mają wysokość, i na teyże ście-  
my są zbudowane podstawie, chociaż żadna  
z ich ścian stojących na bokach podstawy,  
nie będzie na teyże ście-  
my płaszczyn-  
ie. Ja-  
ae do  
kąt  
łobok  
legło-  
y pier-  
zegul-  
; Ró-  
prze-  
oscia-  
zcze-  
wne,  
h ką-  
mo-  
ryło-  
wóch  
Bryły  
e so-  
Bry-  
wy-  
e się  
y od  
ryle  
cian  
iany

Niech będą dwa Równoległości-  
ACGE, i ACLI, na teyże ście-  
AC, z iednaką wysokością; i niech inne  
ich ściany na odmiennych znajdują się  
płaszczyznach; te dwa Równoległości-  
ny są równe.

Tab. III

Fig. 4.

*Dowódz.* Przedłużmy linie KI, HE  
tak daleko, aż się zniydą z sobą w pun-  
kie O. Niech ieszcze i linia LM, prze-  
dłużona, przecina HE, w N; a linia GF  
także przedłużona niech przecina IK w P  
i niech Q będzie punktem przecięcia li-  
niy GF, LM, albo ich przedłużeń.

Pociągniemy linie AN, DO, BQ, CP.

Bryła ACQO, będzie Równoległości-  
nem, czego bardzo łatwo dowieść mo-  
żna.

H

Ró-

G, czyli by się znajdował między G i  
H, czyli nakoniec byłby na linii HG  
przedłużoney,



Równoległoscian ACQO, ma tę samę co tamte dwa, podstawę AC,

Ma ścianę AO na płaszczyźnie ściany AE, należącey do Równoległoscianu, ACGE, więc temu Równoległoscianowi będzie równy.

Ma zaś oprócz tego ścianę AQ na płaszczyźnie ściany AL, należącey do Równoległoscianu ACLI, więc będzie równy i temu drugiemu Równoległoscianowi.

Więc Równoległoscian ACQO równy jest tak Równoległoscianowi ACGE. iako i Równoległoscianowi ACLI; a zatym i te dwa Równoległosciany są też sobie równe,

77 *Twierdz. 5.* Dwa Równoległosciany są równe, gdy iednaką mają wysokość i równe podstawy, z iednym spólnym bokiem, i gdy ich ściany na tymże samym boku spólnym wystawione, zuayduią się na teyże samey płaszczyźnie.

*Tb. III* Niech będą dwa Równoległosciany:  
*Fig. 5.* ACGE, ICOQ iednakiey wysokości; a podstawy ich równe AC, IC, niech mają bok

bok spólny CD, na którym wystawione są dwie ściany DE, DP na teyże samey płaszczyźnie znajdujące się, te dwa Równoległościany są równe-

*Wykreśl.* Przez punkta I, i L, poprowadźmy na płaszczyźnie AG, czyli AO, linie JN, LM, równoodległe od AH, albo BG, i niech te równoodległe spotykają w N i M. linią HO. Pociągniemy i linie EN, FM. Bryła JCME będzie też Równoległościaniem.

*Dowódz:* Równoległościan: ICME, ma też samą podstawę JC, i tę samą wysokość, co i Równoległościan JCOQ, a zatem są sobie równe.

Tenże Równoległościan JCME, i Równoległościan ACGE, uważając w nich ścianę spólną DE, iak podstawę, mają też jednaką wysokość, a zatem są sobie równe. Więc Równoległościan JCME, równy jest takiednemu, iak i drugiemu Równoległościanowi: ACGE. i JCOQ, a zatem i te dwa Równoległościany są równe.

78. *Twierdza:* 6. Dwa Równoległościany są równe, gdy mają jednaką wysokość, *Tab. III*  
H<sub>2</sub> *fig. 5*

gdy ich podstawy mające bok ieden spólny, są równe.

Niech we dwóch Równoległościach jednakiej wysokości będą dwie podstawy: AC, i IC równe, i mające spólny bok CD; te dwa Równoległościany będą równe.

*Wykreśl.* Na podstawie IC, jednego z tych Równoległościanów, który nazwiemy pierwszym, postawmy trzeci Równoległoscian teyże samey wysokości, tak, aby ściana jego stoiąca na boku CD, znajdowała się napła zczyźnie ścianie drugiego Równoległoscianu, stoiącey na tymże boku;

Ten trzeci Równoległoscian, iako mający z pierwszym spólną podstawę i wysokość, będzie mu równy. Tenże trzeci Równoległoscian, będzie równy, i drugiemu; bo mają równe podstawy: IC, AC, z spólnym bokiem CD, i ściany ich stojące na boku CD. znajdą się na teyże samey płaszczyźnie.

Więc ten trzeci Równoległoscian równy jest tak pierwszemu jak i drugiemu, a zatem i one sobie równe będą.

*Wszczę.*

*W szczególności.* Równoległością każdy równy jest Równoległością prostokątnemu, który ma tę samą, co i ten wysokość, podstawę równą podstawie jego, i bok jeden wspólny obydwom podstawom.

79. Zkąd wynika, że cokolwiek się powiedziało o Równoległościach prostokątnych, wszystko to do jakichkolwiek innych można przystosować; kładąc zamiast każdego z nich, Równoległością prostokątną, teży samej wysokości, i podstawy równej, a mającej bok jeden wspólny z podstawami Równoległością, nie prostokątnych. I tak.

1. Dwa Równoległością, mające równe podstawy i wysokości, są równe; bo Równoległością prostokątne jednakiej wysokości, i mające ztamtęmi Równoległością równe podstawy, a w nich wspólny bok jeden, są równe.

2. Dwa Równoległością są też równe, których podstawy są w stosunku odwrotnym, ich wysokości.

3. Dwa Równoległością, których bryłowości są równe, mają podstawy w stosunku odwrotnym ich wysokości.

4. Wszystko to, co się powiedziało o zamienianiu stożunku dwóch Równoległościaków prostokątnych, na stożunek dwóch linii; i o mierze liczebney dwóch Równoległościaków prostokątnych, przyśtożować można do miary Równoległościaków nie prostokątnych; używając do tego, boku jednego podstawy, wysokość iey względem tego boku, i wysokości Równoległościaka.

80. *Prześroga* Gdyby ściśle i prawdziwe Geometryczne dowodzenie wyżej położone przytraadnym się zdawało uczniom do pojęcia, mimo wystawionych im przed oczy figur, z drewna, lub papieru wyrobionych; można im to będzie łatwiej do pojęcia podać w sposób następujący.

Niechay dwa Równoległościaki z równemi podstawami. i wysokościami stożą natyże śmąy płaszczyźnie. Niech inna iakakolwiek płaszczyzna równoodległa od pierwfzey, przecina te dwa Równoległościaki. Przecięcia ich będą równe, i podobne ich podstawom, a zatem i sobie równe będą; i gdziekolwiek te dwa Równoległościaki przetniemy przez płaszczyznę równoodległą od ich pod-



podstaw, równe zawsze będą te przecięcia. Zadney więc niemaż przy-  
czyny, dla ktoreyby ieden z tych Równoległościanów nie miał być równym  
drugiemu.

Trzeba tu jednak ostrzedz zaraz ucz-  
niów, iż tym sposobem, słabo się w  
rzeczy samey dowodzi równość dwóch  
Równoległościanów. Bo chociażby iak  
nawięcey było tych przecięć równo-  
odległych od podstaw Równoległościa-  
nów, to jest: chociażby iak najmniej-  
sza była odległość każdego z tych prze-  
cięcia, od drugiego najbliższego, wszę-  
lako części Równoległościanów zawar-  
te między takiemi dwoma przecięcia-  
mi, są ieszcze Równoległościanami, któ-  
re tak się względem siebie mają, iak się  
mają całe Równoległościany, których  
tante są częściami. Aby więc wniesć  
można równość Równoległościanów, z  
równości ich części, trzeba by pierwey  
dowieść równości tych części.

Moż się imaginacya nasza tak daleko  
zapuścić, że przez nią wystawiamy so-  
bie dwóch Równoległościanów przycię-  
cia tak bliskie iedne od drugich, iż czę-  
ści między niemi zawarte będą się zda-  
wać

wać nie różnić od podstaw tychże Równoległościaków; lecz prawdziwe rozumowanie uczynić tu różnicę potrafi i powinno. Wiemy albowiem że małość lub wielkość jakiej rzeczy, nie jest w sobie małością lub wielkością ale się albo za małość bierze względem innej rzeczy więkzey, albo za wielkość, względem innej mniejszey; i nie można nigdy być choć by też naycieńszey za jedno brać z powierzchniami, które ją kończą. Prawda to jest, że im większa będzie liczba przecięciów, dwóch Równoległościaków przez płaszczyzny równoodległe od ich podstaw, tym mnieysza będzie różnica małych dwóch ich części zawartych między dwiema naybliższymi płaszczyznami, czyli przecięciami; ale znowu, jeżeli iakakolwiek jest choćby też naymnieysza, ta różnica, tedy wielokroć powtorzona może uczynić różnicę wielką, w dwóch Równoległościakach, których równości chcemy dowodzić, z równości z ich częstek, czyli z małych Równoległościaków, z których się składają.

Ta sama trudność do rozwiązania zostaje, gdyby kto równości dwóch Równoległościaków mających jednaką podstawę

stawę i wysokość, a z których jeden byłby na przykład prosty, a drugi nie, chciał dowodzić z podnoszenia się w górę ich podstaw w rowney zawsze od pierwszego położenia odległości; ponieważ pierwsey dowieść trzeba, że miejsce od podstaw przebyte, nie podług tey drogi brane być powinny, którą w samey rzeczy punkt każdy tych podstaw przebył; (bo do iednakiey wysokości postępując, więcey miejsca przejdzie punkt nap: skrajny Równoległościanu ukośnego, niż tego, który jest prosty) ale to miejsce od podstaw Równoległościandw przebyte, powinno się wymierzać wzdłuż linii prostopadley do teyże podstawy, ponieważ ta tylko linia mierzy odległość, w której podstawa podnoszeniem się swoim oddaliła się od pierwszego swego położenia.

Następujące porównywanie może iakożkolwiek służyć do ułatwienia tych wątpliwości, lubo ich nie znośi cale.

Gdy dwa Równoległoboki zrobione na teyże samey podstawie, i z równą wysokością, przetniemy linią równoodległą od podstawy, obadwa przecięcia równe będą podstawie. Wszystkie też inne

ne takowe przecięcia tych dwóch Równoległoboków, byłyby równe, i tyle-  
by ich było w iednym, co i w drugim Ró-  
wnoległoboku. Łoż mówić i odwoch  
Trójkątach, których przecięcia równo-  
odległe od podstaw, Polney, byłyby tak-  
że równe. Dla czegoż więc te dwa całe  
Równoległoboki, lub Trójkąty nie mi-  
łyby sobie być równe? Ponieważ tedy  
tym sposobem dośzliśmy względem  
powierzehni płaskich, tey samey prawdy,  
którey dośzliśmy ściślym pierwey do-  
wodem; iuż ten sam skutek, powi-  
nien nas wątpliwości pozbawić, którąby-  
śmy mieć mogli w używaniu tego spo-  
sobu. Można zatem przytożować go  
i do Brył dla teyże przyczyny.

Obiaśni się to iasnie i potym, gdy mo-  
wić będziemy o sposobie *wyczerpania*  
(de methodo exhaustioms.)

81. *Twierdzenie 7.* Wiakimkolwiek  
Równoległoscianem, przez krawędź któ-  
rąkolwiek, i przez przekątną iedney z  
ścian iego przeciągnąwszy płaszczyznę;  
przecięcie Równoległoscianu przez tę  
płaszczyznę, będzie Równoległobokiem,  
i podzieli Równoległoscian na dwie czę-  
ści, które przyrastać do siebie mogą.

Niech

Niech będzie Równoległością:  $ACGE$ ; *Tab: III*  
 przez krawędź  $AH$ , i przez przekątną *Fig. 1.*  
 $HE$  nich przechodzi płaszczyzna; linie  
 $AH, CE$  są równoległe, a płaszczyzna,  
 która przechodzi przez  $AH, HE$ , prze-  
 chodzi też i przez  $CE$ . Ze zaś linie:  $AH,$   
 $CE$  są równe, i równoodległe, więc Czwor-  
 okąt  $ACEH$ , jest oraz i Równoległobo-  
 kiem.

Dwie Bryły:  $ABCFCH, FEHACD$ , mo-  
 gą przysłać do siebie.

1. Wszystkie ich ściany, są równe ie-  
 dne względem drugich, bo ściany ich  
*Równoległoboczne* (Parallelogrammiczne)  
 są ścianami przeciwnymi w Równole-  
 głością; ściany zaś ich Trójkątne iak  
 nap:  $ADC, HEF$ , mają równe boki ie-  
 dne względem drugich.

2. Wszystkie ich kąty bryłowe mogą  
 przysłać iedne do drugich; nap: kąt bry-  
 łowy w  $A$  iedney Bryły, robi się z trzech  
 kątów płaskich:  $CAB, BAH, HAC$ , które  
 równe są względem kątów  $EFH, EFC,$   
 $HFC$ , z których się robi kąt bryłowy w  
 $F$ , drugiey Bryły.

Więc te dwie Bryły mogą przysłać do  
 siebie, a wizerunekności są sobie równe.

ROZD:



## ROZDZIAŁ V.

### O Graniastopach.

82. *Twierdzenie: przybrane.* Niech będą dwie prostokątne Figury równe i podobne, wykreślone nad dwóch równoodległych płaszczyznach; niech iścze i boki ich równe, będą równoodległe iedne względem drugich; Czworokąty, których bokami przeciwnymi, będą boki równe tych Figur, są Równoległobokami.

*Dowód:* We wszystkich takowych Czworokątach, boki dwa przeciwne są równe, i równoodległe; a zatem i inne boki są też równe i równoodległe.

83. *Defin:* Niech będzie Bryła iaka zakończona dwiema Figurami prostokątnymi, równymi, podobnymi i równoodległymi a mającymi wszystkie boki, iedne względem drugich równoodległe, i tylą Równoległobokami mającemi za boki, boki przeciwne tamtych dwóch Figur, ile każda z tych Figur ma boków, ta Bryła nazywa się *Graniastopem* (Prisma). I tak Równoległościany, o których w poprzedzających Rozdziałach mówi-

mówiliśmy, są pewnemi Graniałostupów gatunkami. Jedną z tych Figur równych i równoodległych, na której wystawiamy sobie, iakoby zbudowany Graniałostup nazywa się jego *podstawą*, a prostopadła spuszczone na tę podstawę, z punktu iakiegokolwiek ściany przeciwney nazywa się *wysokością* tego Graniałostupa. Graniałostup albo jest *prosty*, albo *ukośny*: *prosty*, gdy ściany jego stoją do pionu względem podstawy; *ukośny*, gdy też ściany są do podstawy nachylone.

Różne także nazwiśka przybiera Graniałostup, podług rozmaitej liczby boków podstawy swojej, albo podług wielkości ścian pobocznych. Nazywa się *trójkątnym*, *czworokątnym*, *pięciokątnym*, *sześciokątnym*, gdy podstawa jego jest Trójkątem, Czworokątem, Pięciokątem, Sześciokątem i t. d.

84. *Twierdzenie I.* Przeciwczy gdziekolwiek Graniałostup płaszczyzną równoodległą od jego Podstawy, przecięcie to będzie Figurą równą i podobną podstawie.

*Dowód:* Przeciesie jedney którejkolwiek ściany poboczney, przez tę płaszczyznę-

fzczynę, równoodległym będzie od tego boku podstawy, na którym ta ściana stoi; i te dwie linie będą bokami przeciwnymi Równoległoboku, który za dwa inne boki, ma części dwóch innych boków teyż ściany, zawarte między podstawą i płaszczyzną przecinałą; więc te dwie linie będą równo.

Przecięcia więc przez tę płaszczyznę dwóch ścian przyległych, będą równoodległe względem boków sobie przeciwnych, należących do podstawy, a zatem kąt, który te ściany przycięcia zrobią, równy będzie kątowi zawartemu między temi bokami podstawy.

Będzie tedy mieć przecięcie Graniałostłupa przez tę płaszczyznę, wszystkie swoje boki i wszystkie kąty równe względem boków i kątów podstawy Graniałostłupa, i dla tego przecięcie to przystać może do podstawy.

85. Można sobie wystawić Graniałostłup, iakoby zrobiony przez posuwanie się w górę jego podstawy, w sposób następujący:

Niech będzie Figura iaka prostokreślna, odryślowana na płaszczyźnie. Od wierz-

wierzchołku kąta któregokolwiek tej Figury, wyciągniemy linią prostą czyrą jakiegokolwiek kąta z tą płaszczyzną. Niech się potym wznosi do góry ta Figura, w równej zawsze od siebie odległości, a ten wierzchołek niech nigdy nieśchodzi z linii od niego, wyprowadzonej; Bryła która się takim ruchem utworzy, będzie Graniastosłupem.

§ 6. *Twierdza.* 2. Graniastosłup trójkątny, jest połową Równoległościannu takiego, któryby za podstawę miał Równoległok dwa razy większy od podstawy tego Graniastosłupa. zdwojoma bokami równającemi się bokom podstawy tegoż Graniastosłupa trójkątnego.

Niech będzie Graniastosłup trójkątny *ABCDEF*, którego podstawą jest Trójkąt *ABC*. Dokończmy Równoległoboku *ABCG*, którego dwoma bokami są *AB*, *BC*; na tym Równoległoboku dokończmy Równoległościannu *ACFH*, któryby miał wspólne dwie ściany *AC*, i *BD* z Graniastosłupem trójkątnym.

*Tab. IV.*  
*Fig. 1.*

Dwa Graniastosłupy Trójkątne: *ABCDEF*, *DHFAGC*, mogą do siebie przyśtać, bo są dwiema częściami oddzielone-

mi

mi przez płaszczyznę przekątną ACDF; a zatem ieden z nich, nap: Graniaściosłup ABCDEF, iest połową Równoległościannu ACEH,

87 *Wniosek.* Cokolwiek się powiedziało o Równoległościannach względem ich wielkości, wszystko to przystosować można do Graniaściosłupów trojkątnych, które tych Równoległościannów są połowami.

1. Dwa Graniaściosłupy trojkątne, równej wysokości i podstawy, równają się i w bryłowości.

2. Dwa Graniaściosłupy trojkątne, których podstawy są równe, mają się do siebie, iak ich wysokości.

3. Dwa Graniaściosłupy trojkątne iednakiey wysokości, mają się do siebie iak ich podstawy.

4. Dwa Graniaściosłupy trojkątne, których podstawy są w stosunku odwrotnym ich wysokości, równają się sobie w bryłowości.

5. Dwa Graniaściosłupy trojkątne, równe w bryłowości, mają podstawy w stosunku odwrotnym ich wysokości.

6. Co



6. Co się powiedziało o porównywaniu liczebnym dwóch Równoległościątów, to twierdzić można i o porównywaniu dwóch Graniałostupów trójkątnych. Trzeba podobnie dla znalezienia ich bryłowości przez rachunek, rozmnożyć liczbę, znaczącą wielkość podstawy Graniałostupa trójkątnego, przez liczbę znaczącą wielkość jego wysokości.

7. Mając wiadomą podstawę Graniałostupa trójkątnego, i kąty dwóch ścian jego, które z kątem podstawy czynią jeden kąt bryłowy, można wyznaczyć Graniałostup trójkątny, i jego wysokość, a zatym i bryłowość tymże samym sposobem, jak się czyniło względem Równoległościątów.

8. Graniałostupy trójkątne, mające spólny kąt ieden bryłowy, są do siebie jak Równoległościąty prostokątne, mające te same trzy krawędzie; w rachunku zaś tak są do siebie, jak liczby trzy ciągiło iedna przez drugą rozmnożone, wyrażające wielkość tych trzech krawędzi.

38. Twierdż: 3. Graniałostup nie trójkątny może być rozłożony na Grania-

niafłofłupy tróykątne teyże co on wy-  
fokości; za podftawy zaś mające Tróy-  
kątę, naktóre rozdzielona iefł iego  
podftawa przez tyle przekątnych cią-  
gnionych od iednego tey podftawy  
wierzchołka do innych, ile ich popro-  
wadzić można.

*Tab. IV.* Niech będzie ABCDE, podftawa nap:  
*Fig. 2.* pięciokątna Graniafłofłupa ABCDEedcba.  
Od iey wierzchołka nap: A poprowadź-  
my przekątne: AD, AC, te rozdzielią  
Podftawę na trzy Tróykąty: AED, ADC,  
ACB. Na fćianie przeciwney podftawie,  
od punktu *a*, odpowiadającego punkto-  
wi A, poprowadźmy przekątne: ad, ac.

Linie Aa, Dd, fą obiedwie równood-  
ległe od linii Ee, i oney równe; więc i  
względem fiebie będą równoodległemi i  
równemi; a przeto Czworokąt ADDa,  
iefł Równoległobokiem, a zatym Bryła  
ADEeda, iefł Graniafłofłucem tróyką-  
tnym. Tymże fposobem okazuje fię, że  
i Bryły: ACDdca, ACBbca, fą Graniafłofł-  
upami tróykątnymi.

89. *Twierdze: 4.* Dwa iakiekolwiek  
Graniafłofłupy mające równą wyfokość,  
tak fię do fiebie mają, iak ich podftawy.  
Jakoż

Jakoż Graniałostłupa ADE eda, ADC eda, ACB bca, i t. d. mają się do siebie jak ich podstawy; ADE, ACD, ABC; więc jeden z nich, nap: Graniałostłup: ADE eda, tak się ma do summy wszystkich, to jest, do Graniałostłupa pięciokątnego, jak podstawa trójkątna pierwszego, do summy podstaw wszystkich, to jest, do podstawy Graniałostłupa pięciokątnego.

Podobnie też i każdy inny Graniałostłup iednakiey wysokości, takby się miał do Graniałostłupa trójkątnego: ADE eda, jak podstawa jego do podstawy trójkątney ADE.

Więc (złożywszy łosunki) będzie łosunek iakiegokolwiek Graniałostłupa do Graniałostłupa ABCDE edcba, równy łosunkowi podstawy pierwszego Graniałostłupa, do podstawy ABCDE; (a to wtedy, gdy wysokości tych dwóch Graniałostłupów są równe.)

Wszczegulności zaś, gdy Równoległością i Graniałostłup iakikolwiek równe mieć będą podstawy i wysokości; bryłowatość iednego, równa będzie bryłowatości drugiego.

A zatym cokolwiek się o Równoległościach powiedziało, można to i do

Graniaściosłupów iakichkolwiek przyśto-  
sować, co do wielkości ich, ile te zawie-  
sły od ich podstaw i wysokości. Można  
przeto do iakichkolwiek Graniaściosłu-  
pów przyśtosować wnioski, co do Grania-  
ściosłupów trójkątnych w szczególno-  
ści, które po Twierdzeniu 2gim tego Ro-  
zdziału następują.

## ROZDZIAŁ VI.

### *O Piramidach albo Ostrosłupach.*

90. *Defin:* Niech punkt iaki znajdu-  
ie się nad płaszczyzną Figury  
iakieykolwiek prostokreślney; przez ten  
punkt i przez wszystkie boki Figury,  
niechay przechodzą płaszczyzny; zro-  
bi się ztąd Bryła kończąca się z iedney stro-  
ny na tey Figurze, a z innych stron, na  
tylu Trójkątach mających spólny wierz-  
chołek w owym punkcie, ile ta Figura  
ma boków. Bryła ta nazywa się *Ostro-  
slupem* (Pyramis.) Powierzchnią Ostro-  
słupa można sobie wystawić iakoby zro-  
bioną ruchem nici przywiązaney iednym  
końcem do punktu znajdującego się nad-  
płaszczyzną Figury, a drugim końcem  
wyciągnięnym obracaiący się około ob-  
wodu teyże Figury. Figura prostokre-  
slna,

śleca, które y boki służą za podstawy Trójkątów kończących Ostrosłup, nazywa się *podstawą ostrosłupa*, te Trójkąty nazywają się jego *ścianami*; punkt który jest wierzchołkiem spólnym w wszystkich ścian Ostrosłupa, nazywa się *wierzchołkiem* jego. Prostopadła spuszczone od tego wierzchołka, na płaszczyznę podstawy, zowie się *wysokością* Ostrosłupa.

Ostrosłup różne przybiera nazwiska, podług wielkości boków podstawy swojej. Nazywa się trójkątnym, czworokątnym, pięciokątnym, sześciokątnym i t. d. gdy podstawa jego jest Trójkątem, Czworokątem, Pięciokątem, Szesciokątem i t. d.

Ten Ostrosłup nazywać będziemy *prostym*, którego podstawą jest Figura prostopadła, mogąca się na kole opisać; i gdy prostopadła spuszczoney od wierzchołka tego Ostrosłupa, drugi koniec przypada na środek tego koła.

W takim Ostrosłupie wysokość wszystkich ścian jest jednakowa, i tych ścian płaszczyzn równie są nachylone do płaszczyzny podstawy.

W Ostrosłupie, którego podstawą jest Figura prostopadła, mogąca się wpisać w koło



wkoło, a którego wysokość wychodzi od środka, tego koła, wszystkie krawędzie ścian są równe, a zatym wszystkie te ściany są Trójkątami równoramiennymi. Ale że środek koła opisanego na podstawie, może czasem za tę podstawę wychodzić, dla tego, takowego Ostrosłupa nie można nazywać prostym.

Zeby jednak nazwisko to Ostrosłupa prostego (zle do tych czas zwyczajnie określone) ogólniejszym uczynić, przydamy następujący warunek.

Gdy w Figurze prostokreślnej, znajduje się taki punkt, przez który ciągnięte linie a po obydwóch stronach na obwodzie Figury zakończone, dzielą się w tym punkcie na dwie równe części, ten punkt nazywa się środkiem Figury.

I tak punkt przecięcia przekątnych w Równoległoboku, jest tego Równoległoboku środkiem. Jeżeli tedy Figura prostokreślna mająca taki środek, służy za podstawę Ostrosłupowi, i jeżeli prostopadła od wierzchołka jego spuszczone przypada na ten środek Figury, taki Ostrosłup nazwiemy prostym.

Ostro.

Ostrosłup nazywają *foremnym*, gdy za podstawę ma Figurę protokreślną foremną.

91. *Twierdź*: 1. Przeciąwszy Ostrosłup płaszczyzną równoodległą od podstawy jego, przecięcie to będzie figurą podobną do podstawy.

Niech będzie Ostrosłup  $SABCDE$ , ma- *Tab: IV*  
iący wierzchołek w punkcie  $S$ , a którego *Fig: 3*  
podstawą jest Figura prostokreślna  $ABCDE$ .  
Niech ten Ostrosłup przecina płaszczy-  
znarównoodległą od podstawy, przecię-  
cie to  $abcde$  będzie podobne do podstawy.

Ponieważ płaszczyzna podstawy równoodległa jest od płaszczyzny przecina-  
jącej; będą też i przecięcia ścian, wspólne  
z temi płaszczyznami, równoodległe ie-  
dne względem drugich; więc wszystkie  
boki przecięcia nap.  $ab$ ,  $bc$  równoodle-  
głe będą względem boków  $AB$ ,  $BC$  pod-  
stawy; a zatym i wszystkie kąty przecię-  
cia, równe będą względem kątów pod-  
stawy, nap: kąt  $abc$ , równy będzie kąto-  
wi  $ABC$ . Iest tedy przecięcie równokątne z podstawą.

Trójkąty  $SAB$ ,  $sab$  są podobne, więc  
 $Sb: SB = ab: AB$ .

Tróy-

Trójkąty też, Sbc, SBC podobne; więc:  
Sb: SB=bc: BC; a zatym ab: AB=bc: BC.

Więc przecięcie, i podstawa, mają około kątów względem siebie równych, boki proporcjonalne, a zatym przecięcie podobne jest do podstawy.

W szczególności zaś, przecięcie takie, i podstawa, mają się do siebie w stosunku dwumnożnym boków ich, odpowiadających sobie; albo są do siebie w stosunku dwumnożnym linii nap: Sb, SB; albo nakoniec w stosunku dwumnożnym ich odległości od wierzchołka S, Ostrośłupa, mającej się wymierzać przez prostopadłą spuszczoną od tego wierzchołka, do ich płaszczyzn; tak dalece, że przecięciawszy Ostrośłup płaszczyznami równoodległymi od podstawy, a w takich od wierzchołka odległościach, aby te miały się do siebie, jak liczby 1, 2, 3, 4, 5, i t. d: powierzchni tych przecięciów będą do siebie jak liczby 1, 4, 9, 16, 25, i t. d. (Obacz Geometrii Części I. Rozdz. IX.)

*Uwaga.* Tego Podania częste jest w Fizyce używanie; i dla tego trzeba je jak najyjaśniej uczniom wyłożyć, i o gruntownym jego zrozumieniu od nich być przeświadczonym.

92. *Wniosek 1.* Niech będą dwa Ostrosłupy z jednakową wysokością, i równymi podstawami znajdującymi się na tejże samej płaszczyźnie, i po tej samej stronie tej płaszczyzny. Gdy te Ostrosłupy przecniemy płaszczyznami równoodległymi od ich podstaw, przecięcia odpowiadające sobie, tak się mają do siebie, jak podstawy tych Ostrosłupów; a w szczególności, gdy te podstawy równe będą, wszystkie też przecięcia jednego Ostrosłupa będą równe przecięciom odpowiadającym drugiego.

93. *Wniosek 2.* Z tego co się powiedziało o równości Graniastosłupów mających jednaką wysokość i równe podstawy, a stojących na tejże samej płaszczyźnie, iako też i o proporcjonalności tych Graniastosłupów z ich podstawami, gdy te przy równych wysokościach, są nierówne; możnaby mniemać, że też i Ostrosłupy mające równe wysokości, i podstawy, są równe, i że gdy równe mają wysokości, będą do siebie jak ich podstawy.

Następujące Twierdzenia zamienią to mniemanie w pewność, gdy ich dowody przytoczymy.

94. *Twierdzenie przybrane.* Niech będzie Ostrośłup Trójkątny przecięty płaszczyznami równoodległemi od podstawy, i w jednakowej od siebie odległości zstępującemi. Na podstawie, i na każdym przecięciu wystawmy ku wierzchołkowi Ostrośłupa, Graniałtośłupy z których każdy ma być wysokości równą odległości dwóch płaszczyzn najbliższych. Na tychże przecięciach, wystawmy znowu inne Graniałtośłupy ku podstawie, z tą samą, co pierwsze, wysokością. Niech każdy z tych Graniałtośłupów ma jedną krawędź spólną z Ostrośłupem, i dwie ściany na tychże płaszczyznach co i dwie krawędzie Ostrośłupa. Różnica summy wszystkich pierwszych Graniałtośłupów (które nazwę opisanemi) od summy drugich (które nazwę wpisanimi) równa będzie pierwszemu Graniałtośłupowi, który jest wystawiony na podstawie Ostrośłupa.

*Tab. I. 7* Niech będzie Ostrośłup trójkątny  $SABC$ ,  
*Fig: 4.* którego wiezchołek  $S$ , a podstawa  $ABC$ .

Podzielmy ten Ostrośłup na części nap: 5, płaszczyznami równoodległemi od podstawy, i w jednakowej od siebie odległości zstępującemi. Niech będą:  $A^1B^1C^1$   $A^2B^2C^2$   $A^3B^3C^3$   $A^4B^4C^4$  przecięcia Ostrośłupa, przez



przez te płaszczyzny. Na podstawie i na wszystkich przecięciach Ostrosłupa wystawmy ku jego wierzchołkowi Graniałostłupy, kończące się na przecięciu najbliższym; te będą opisanemi na Ostrosłupie, bo ich ściany występować będą za ściany Ostrosłupa. Wystawmy znowu na tychże przecięciach ku podstawie, inne Graniałostłupy teyże samey co pierwsze wysokości; te będą wpisane w Ostrosłup, bo za ściany ich, będą wychodzić ściany Ostrosłupa. Różnica między summą pierwszych i drugich Graniałostłupów, równać się będzie Graniałostłupowi opisanemu, wystawionemu na podstawie Ostrosłupa.

*Wykreśl:* Podzielmy linie AB, AC, na 5 równych części, w punktach:  $b^1, b^2, b^3, b^4$ ,  $c^1, c^2, c^3, c^4$ . i pociągniemy linie;  $b^1c^1, b^2c^2, b^3c^3, b^4c^4$ .

Trójkąty:  $Ab^1c^1, Ab^2c^2, Ab^3c^3, Ab^4c^4$ , będą równe względem Ostrosłupa przecięciów:  $A^1B^1C^1, A^2B^2C^2, A^3B^3C^3, A^4B^4C^4$ .

Różnica między Graniałostłupem opisanym a stojącym na podstawie ABC, i między Graniałostłupem wpisanym a stojącym

iącym na podstawie  $A^1B^1C^1$  równa się Graniałostłupowi teyże samey co tante wysokości, mającemu za podstawę, różnicę tamtych dwóch podstaw, to jest Czworokąt  $BCc^1b^1$ .

Podobnie i różnica między Graniałostłupem opisanym, a stojącym na przecięciu  $A^1B^1C^1$ , i między Graniałostłupem wpisanym a stojącym na przecięciu  $A^2B^2C^2$  równa się Graniałostłupowi, teyże samey co one wysokości, mającemu za podstawę, różnicę tamtych dwóch podstaw, to jest Czworokąt  $b^1c^1b^2c^2$ .

Także różnice dwóch par Graniałostłupów następujących, równe są Graniałostłupom, teyże co one wysokości mającym za podstawy Czworokąty  $b^2c^2b^3c^3$  i  $b^3c^3b^4c^4$ .

Ostatni zaś Graniałostłup opisany, równa się Graniałostłupowi, teyże co on wysokości, mającemu za podstawę Trójkąt  $Ab^4c^4$ .

Różnica tedy między sumą wszystkich Graniałostłupów opisanych, a sumą wszystkich Graniałostłupów wpisanych, równa będzie summie wszystkich Graniałostłupów teyże co one wysokości, któreby stały

stały na Czworokątach  $BCc'b'$ ,  $b'c'c^2b^2$ ,  $b^2c^2c^3b^3$ ,  $b^3c^3c^4b^4$ , i na Trójkacie  $At^4c^4$ , to jest: równa będzie Graniałostłupowi trójkątnemu teyże co one wysokości, a mającemu za podstawę Trójkąt  $ABC$ . Ta więc różnica równa się w samey rzeczy pierwizemu Graniałostłupowi opisanemu.

95. *Wniosek.* Pierwszy ten Graniałostłup opisany na Ostrostłupie  $SABC$ , którego podstawa  $ABC$  nie odmienia się, będzie tym mnieyszy, im mnieyszą damy mu wysokość, to jest, im liczba przecięć Ostrostłupa będzie więktsza. Można zaś uczynić ten Graniałostłup mnieyszym od iakiegokolwiek Graniałostłupa oznaczonego, zamieniając ten ostatni Graniałostłup na inny, któryby miał za podstawę Trójkąt  $ABC$ , i dzielić wysokość jednostayną Ostrostłupa, na tyle części, aby każda z nich była mnieysza od wysokości tego Graniałostłupa tak przetobionego.

Mając więc dany Ostrostłup, można weń wpiąć, i opisać na nim sposobem wyżej wyrażonym, tyle Graniałostłupów, aby różnica dwóch summ, mnieysza była od iakiegokolwiek Graniałostłupa na

znaczno-

znaczonego, a tym bardziey, aby różnica Ostroślupa od iedney z tych summ mnieysza była od iakiegokolwiek Graniaślupa naznaczonego.

96. *Twierdż. 2.* Dwa Ostroślupy mające równe wysokości i podstawy, są równe.

Gdyby te dwa Ostroślupy nie były równe, tedy daymy, że ieden z nich byłby większy od drugiego. Niechby więc ta mniejsza ich różnica zamieniona była na Graniaślup mający równą z temi Ostroślupami podstawę. Podzielmy wysokość iednego z tych Ostroślupa na tyle części równych, aby każda z nich mnieysza była od wysokości tego Graniaślupa. Wpiszmy w ten Ostroślup i opiszmy na nim Graniaślupy sposobem wyrażonym w poprzedzającym Twierdzeniu przybranym. Toż uczynmy i na drugim Ostroślupie; wszystkie Graniaślupy wpisane, i opisane, na tych dwóch Ostroślupach, będą równe iedne względem drugich (87. 88) a zatym summa Graniaślupów wpisanych nap: w ieden Ostroślup będzie równa summie Graniaślupów wpisanych w drugi Ostroślup. Ze zaś zrobiliśmy różnicę dwóch summ

Gra.

Graniaściosłupów wpisanych i opisanych na pierwszym Ostrosłupie, mnieysza od różnicy mniemaney dwóch Ostrosłupów, więc tym bardziey różnica tego Ostrosłupa od summy wszystkich Graniaściosłupów weń wpisanych, mnieysza będzie, od różnicy mniemaney tych dwóch Ostrosłupów; a zatem i różnica pierwszego Ostrosłupa, od summy Graniaściosłupów wpisanych w drugi Ostrosłup, mnieysza będzie, niż różnica pierwszego Ostrosłupa od drugiego. Summa tedy Graniaściosłupów wpisanych w ten drugi Ostrosłup, byłaby większa od tego drugiego Ostrosłupa, co być nie może; a przeto te dwa Ostrosłupy nie mogą sobie być nierównne.

97. *Twierdź*: 3. Graniaściosłup trójkątny, może zawsze być rozłożony na trzy Ostrosłupy trójkątne równe, z których dwa mieć będą tę samą podstawę i wysokość, co i Graniaściosłup.

Niech będzie Graniaściosłup trójkątny *Tab. 14* ABCFE, można go rozłożyć na trzy *Fig. 5* Ostrosłupy trójkątne równe, z których dwa, tę samą, co on mieć będą podstawę i wysokość.

Przez bok AC, podstawy ABC, Graniaściosłupa, i przez koniec F, krawędzi jego



tego Graniałtoślupa nie przechodzącej przez punkta: A i C, przeciągniemy płaszczyznę ACF; odetnie ona od Graniałtoślupa, Ostroślup trójkątny FABC. mający za wierzchołek, punkt F, a za podstawę, Trójkąt: ABC; a zatym ten Ostroślup, tę samą co i Graniałtoślup mieć będzie podstawę i wysokość.

Podobnie i przez bok EF, ścianę przeciwną podstawie, i przez punkt C przeciągniemy płaszczyznę ECF; odetnie ona od Graniałtoślupa, Ostroślup trójkątny: CEDF, mający za wierzchołek, punkt C, a za podstawę Trójkąt DEF, równy Trójkątowi: ABC, a zatym i ten drugi Ostroślup ma tę samą także co i Graniałtoślup, podstawę i wysokość.

Więc dwa Ostroślupy: FABC, CEDF równe mają wysokości, i podstawy, a zatym są równe (96). Zostanie jeszcze po tych dwóch przecięciach, Ostroślup CFEA, zakończony czterema Trójkątami: ACF, ACE, AEF, ECF.

Wystawmy sobie, ten ostatni Ostroślup jako mający za podstawę, Trójkąt: nap: ACE, a za wierzchołek, punkt F, Ostroślup zaś CEDF, iakoby miał za podstawę, Tróy.

Trójkąt: CDE, a za wierzchołek ten-  
że punkt F. Przekątna CE, Równole-  
bok ACDE, dzieli go na dwa Trójkąty,  
które przysłać do siebie mogą; więc te  
dwa Ostrosłupy mają podstawy równe,  
ACE, DEC i na ienym płaszczynie się zay-  
dujące się; a oprocz tego mają spóły w wierz-  
chołek w punkcie F, a zatem i wysokość  
równą; więc są równe; wszystkie tedy  
trzy Ostrosłupy, na które Graniastosłup  
był podzielony, są równe.

Wziemiemy Ostrosłup trójkątny, można  
zawsze sobie wystawić, jako trzecią część  
Graniastosłupa mającego tę samą co i O-  
strosłup podstawę, i wysokość.

Niech będzie Ostrosłup trójkątny: ABCE,  
którego podstawa ABC, a wierzchołek E.

Na teyże podstawie ABC, wystawmy  
sobie iakoby zbudowany Graniastosłup,  
ABCDE, którego dwie ściany ABCE,  
BCDE znajdowałyby się na tych samych  
płaszczyznach, na których zaydują się  
dwie ściany Ostrosłupa, i krawędź im spól-  
na BE. Podług Twierdzenia poprzedzają-  
cego, ten Graniastosłup jest trzy razy tak  
wielki, iak Ostrosłup; więc też i ten O-  
strosłup jest trzecią częścią tego Graniasto-

K

stupa

stupa. A że wszystkie Graniałostupy mające równe podstawy i wysokości, są równe; więc Ostrostup trójkątny jest trzecią częścią Graniałostupa iakiegokolwiek, mającego taką samą iak on podstawę i wysokość.

98. *Twierdź*: 4. Ostrostup iakikolwiek jest trzecią częścią Graniałostupa mającego tę samą co on podstawę, i wysokość.

*Dowódz*. Jakażkolwiek będzie podstawa Ostrostupa, poprowadźmy na niej przekątne tyle do wszystkich kątów, ile można. Przez te wszystkie przekątne, i przez wierzchołek Ostrostupa niech przechodzą płaszczyzny; Ostrostup będzie przez te płaszczyzny podzielony na tyle Ostrostupów trójkątnych, na ile Trójkątów podstawa była podzielona przez przekątne; każdy z tych Ostrostupów trójkątnych, będzie trzecią częścią Graniałostupa mającego taką samą iak on podstawę, i wysokość; a zatem summa wszystkich tych Ostrostupów trójkątnych, to jest cały iakikolwiek Ostrostup znich się składający, równać się będzie trzeciej części, summy wszystkich tych Graniałostupów, albowi naiedno wychodzi, równać się będzie

dzie trzeciej części Graniaśtosłupa mającego tę samą podstawę i wysokość, co i Ostrosłup.

99. *Wniośki.* Cokolwiek się o stosunku Graniaśtosłupów powiedziało, toż można i o stosunku Ostrosłupów, które, mając takie same iak i te Graniaśtosłupy, podstawy, i wysokości, są trzeciemi względem nich częściami.

1. Dwa Ostrosłupy iakiegokolwiek (proste, lub ukośne foremne, lub nie foremne) z równemi wysokościami, tak się do siebie mają, iak ich podstawy.

2. Dwa Ostrosłupy z równemi podstawami, tak się do siebie mają, iak ich wysokości,

3. Dwa Ostrosłupy są równe, gdy ich podstawy są w stosunku odwrotnym ich wysokości.

4. Dwa Ostrosłupy równe, mają podstawy w stosunku odwrotnym ich wysokości, i wyraz liczebny bryłowości Ostrosłupa będzie znaleziony, gdy się weźmie trzecia część dwóch liczb rozłożonych, z których jedna znaczyłaby

wielkość powierzchni podstawy tego Ostrosłupa, a druga, wielkość jego wysokości.

100. *Uwaga.* Mając dane wliczbach, sześć krawędzi iakiego Ostrosłupa trójkątnego, można wyznaczyć bryłowatość tego Ostrosłupa.

Jakoż złożywszy Trójkąt z trzech takowych krawędzi, i uważając go iak podstawę Ostrosłupa; a na trzech bokach tej podstawy, zrobiwszy trzy Trójkąty, natęży samey, co i podstawa płaszczyźnie, dawszy każdemu z nich za boki, po dwie krawędzie z trzech pozostałych; te Trójkąty będą ścianami Ostrosłupa. Kąt każdy bryłowy przy podstawie, składać się będzie, z kąta Trójkąta wziętego za podstawę, i z dwóch kątów ścian dwóch prz. podstawie. Ponieważ zaś te kąty są wiadome, więc będzie można wyznaczyć pochyłość ścian do podstawy, a w szczególności będzie można wyrachować stosunek wysokości Ostrosłupa, do spólnego przecięcia tych dwóch ścian. Aże to spólne przecięcie jest dane co do wielkości, więc doydziemy i wysokości Ostrosłupa, a zatym i jego bryłowatości,

ktora



która zawisa od wysokości Ostrosłupa,  
i powierzchni jego podstawy.

101. Uwaga 2. Można tę brylowatość  
wyznaczyć i bez Trygonometrii, iako się  
to pokaże w Algebrze.

102. Uwaga 3. Gdy Ostrosłup jest fo-  
remny, a za ym trzy ścian jego krawę-  
dzie są równe; Kwadrat wysokości O-  
strosłupa, równa się różnicy kwadratu  
jedney krawędzi, od kwadratu promie-  
nia koła na podstawie opisanego. A  
przeto ta wysokość może być bardzo łat-  
wo w liczbach wyznaczona, bez po-  
mocy Trygonometrii. Ten zaś sposób  
postępowania przyśtosować można do  
wszystkich Ostrosłupów foremnych, i-  
każkolwiek byłaby liczba ich boków w  
podstawie.

PrzykŁ 1. Wyznaczyć brylowatość  
Bryły nazwaney *Czworościanem* (Tetra-  
edrum.)

Bok ieden *Trojkąta* równobocznego  
wyznaczywszy przez liczbę 2, kwadrat  
wysokości tego *Trojkąta* wyrazi się  
przez liczbę 3. Promień koła opisanego  
jest  $\frac{2}{3}$  tej wysokości, więc kwadrat tego  
pro-

promienia, jest 3, kwadratu wysokości Trójkąta, a zatem kwadrat tego promienia jest  $\frac{12}{9}$ . Ze zaś kwadrat wysokości

tego Ostrosłupa jest  $4 - \frac{12}{9} = \frac{24}{9} - \frac{4 \times 6}{9}$

więc sama wysokość będzie  $= \frac{2\sqrt{6}}{3}$ .

Powierzchnia Trójkąta służącego za podstawę wyrazi się przez  $V_3$ , a zatem bryłowatość Ostrosłupa będzie wyrażona przez  $\frac{2V_2}{3}$ ; to jest bryłowatość Ostrosłupa tak się ma do bryłowatości Sześcianu równego co do boków Ostrosłupowi, iak  $\frac{2V_2}{3}$  do 8, albo iak  $V_2$  do 12; albo iak 2 do  $12V_2$ , albo iak 1 do  $6V_2$ ; albo nakoniec iak 1 do  $V_72$ ; który to stosunek bliski jest stosunkowi 2 do 17, albo 33 do 280, a bardzo mało różni się od stosunku 68 do 577.

*Przykł. 2.* Wyznaczyć bryłowatość Ośmiościanu foremnego.

Można sobie Ośmiościan wystawić w myśli, iakoby złożony z dwóch Ostrosłupów prostych kwadratowych, stykających się z sobą równymi podstawami.

Wyra-

Wyraziwszy bok jeden Ośmiościanu tego, przez 2, kwadrat promienia koła opisanego na podstawie jednego z tych dwóch Ośroślupów, będzie wyrażony przez 2, a kwadrat wysokości tego Ośroślupa wyrazi się przez różnicę między kwadratem z 2, to jest 4, i 2, to jest będzie  $= 4 - 2 = 2$ . Wysokość zaś tego Ośroślupa wyrazi się przez  $\sqrt{2}$ ; więc bryłowość jednego tego Ośroślupa będzie oznaczona przez  $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ , a zatem

bryłowość Ośmiościanu przez  $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ .

Jest tedy bryłowość Ośmiościanu foremnego do bryłowości Sześciannu równego co do wielkości boków, iak  $8\sqrt{2}$  do 8, albo iak  $\sqrt{2}$  do 1, który to sto-

funek bliski jest stosunkowi 8 do 17, albo 17 do 36, a bardzo mało różni się od stosunku 33 do 70.

103. Uwaga 3. Ponieważ ściany Ośroślupa są powierzchniami płaskimi i to jeszcze trójkątnymi, wyznaczenie jego powierzchni, żadney nie podlega trudności. Gdy Ośroślup jest foremny, powierzchnia jego (opócz podstawy) równa

wna będzie Trójkątowi, któryby miał za podstawę, obwód podstawy Ostrosłupa; a wysokość równą wysokości ściany którejkolwiek (ponieważ wszystkie są równe.)

*Wybieczenie (Digressio) o sposobie' wy-  
czepiania naczynia po Łacinie Metho-  
dus exhaustionis; mające służyć za wstęp do  
Rozdziałów następujących.*

104. Sposob, którego się użyło dla do-  
wieczenia równości dwóch Ostrosłupów,  
których podstawy i wysokości są równe,  
na to wypada, aby okazać, iż każdy z  
tych Ostrosłupów zawarty jest mię-  
dzy dwiema ilościami, których róż-  
nica może być mniejsza od iakieykol-  
wiek ilości naznaczoney; to jest: że ka-  
żdy Ostrosłup jest zawarty między summą  
Graniastrosłupów na nim opisanych i sum-  
mą Graniastrosłupów weń wpisanych; i  
że tych dwóch summ różnica może być  
mniejsza od iakieykolwiek ilości na-  
znaczoney; a tym bardziey każdego z  
tych Ostrosłupa różnica, od iedney z  
tych summ, może być mniejsza, niż ia-  
kakolwiek ilość naznaczona. Zkąd mo-  
żna było Ostrosłupom porównywanym  
do siebie przyrównywać to wszystko, co-  
kolwiek się powiedziało o stosunku ie-  
dney

dney z tych summ, nap: summy Grania-  
stosłupów opisanych na iednym Ostrosłu-  
pie, do drugiey z tych summ, to iest do  
summy Graniastosłupów w iednakiey  
liczbie, opisanych na drugim Ostrosłu-  
pie. Ze zaś, gdy Ostrosłupy miały ró-  
wne podstawy i wysokości, te dwie sum-  
my Graniastosłupów były równe; więc  
też i Ostrosłupy, których różnica od  
tych dwóch summ może być niecyfry,  
niż iakakolwiek ilość naznaczona, będą  
równe.

105. Gdyby dwa Ostrosłupy miały tyl-  
ko wysokości równe, a podstawy nieró-  
wne; możnaby tymże samym prawie  
spůsobem okazać, że są do siebie, iak ich  
podstawy; a to ztądby się wniosło, że  
wtymże samym stosunku byłyby do siebie  
summy Graniastosłupów opisanych na ka-  
żdym z tych Ostrosłupów; i że każdy z  
tych Ostrosłupów może się różnić od  
każdey z tych summ, odpowiadających  
sobie, ilością mnieyszą, niżeli iest iaka-  
kolwiek ilość naznaczona.

106. Ponieważ ten spůsob wnoszenia  
stosunku dwóch ilości, które bezśrednie  
z sobą porównywać iest trudne, będzie  
barozo często używany w Rozdziałach  
nastę-



naſtępujących, przeto niezawadzi okazać ieſzcze pewność iego na kilku przykładach, aby już potym nie trzeba było za każdym razem powtarzać całego ciągu takowego działania, który zawsze ieſt jednakowy,

*Przykł. i.* Niechby dowiedziono było, że dwa Równoległoboki mające równe wysokości, ſą do ſiebie, iak ich podſtawy. Trzeba ieſzcze dowieść, że i dwa Trójkąty, których równe ſą wysokości, mają ſię do ſiebie iak ich podſtawy. (W tym zaś ſtawiamy ſię mniemaniu, iakoby nam nie wiadomo było, że Trójkąt ieſt połową Równoległoboku, teyże co on podſtawy i wysokości;)

Niech będą dwa Trójkąty: ABC, abc. *Tab. IV.* równey wysokości, a z nie równemi podſtawami; trzeba dowieść, że ſię tak mają do ſiebie, iak ich podſtawy; a to ztąd, że i Równoległoboki jednakiey wysokości ſą do ſiebie, iak ich podſtawy.

Podzielimy bok ieden nap. AC. na pewną liczbę części równych. Przez wſzystkie punkta podziału poprowadźmy równoodległe od podſtawy; a na każdej z tych równoodległych wpieźmy i opieźmy Tróy-

Trójkątowi ABC, Równoległoboki, mające za wspólną wysokość równe oddalenie dwóch najbliższych równoległych.

Różnica Równoległoboków opisanych, od Równoległoboków wpisanych, równać się będzie największemu z nich Równoległobokowi. Ta zaś różnica może być mniejszą zrobiona, niż jakiegokolwiek Równoległobok naznaczony, odmieniwszy go na inny Równoległobok, któryby tę samą, co i Trójkąt miał podstawę, i kąt z nim przy podstawie wspólny, a potem podzieliwszy drugi bok AC, Trójkąta na tyle części równych, aby każda z nich mniejsza była od drugiego boku, Równoległoboku naznaczonego.

Gdyby to być mogło, aby dwa Trójkąty: ABC, abc, nie miały się do siebie, jak ich podstawy; tedy jeden z tych Trójkątów; np: ABC, byłby do uczynienia tego stosunku, nadto wielki, lub nadto mały.

Niechby więc, jeżeli to być może, trzeba powiększyć Trójkąt ABC, Równoległobokiem ABFE, aby się tak miał do Trójkąta abc, jak AB do ab.

Podziel-

Podzielmy bok  $AC$ . na tyle części równych, aby każda z nich mniejsza była od linii  $AE$ ; wpiszmy potym i opiszmy Trójkątowi Równoległoboki, w potółb wyżej wyrażony. Niech będzie największy z nich Równoległobok  $AGHB$ . Różnica summy Równoległoboków opisanych od summy Równoległoboków wpisanych, uczyniona jest mniejszą, niżeli Równoległobok  $ABFE$ ; tym bardziej zaś Różnica summy Równoległoboków opisanych, na Trójkącie  $ABC$ , od tegoż Trójkąta,  $ABC$ , mniejsza będzie, niżeli Równoległobok  $ABFE$ ; a zatym summa wszystkich Równoległoboków opisanych, mniejsza jest od Równoległoboku  $ABFE$ , wraz wziętego z Trójkątem  $ABC$ .

Podzielmy i bok  $ac$ , Trójkąta  $abc$ , na tyleż części równych, na ile ich był podzielony bok  $AC$ ; opiszmy natym Trójkącie Równoległoboki, tak iak wyżej.

Równoległoboki opisane, natych dwóch Trójkątach, a odpowiadające sobie, tak się mieć będą do siebie, iak poditawy  $AB$ ,  $ab$ , tychże Trójkątów; więc też i summa wszystkich Równoległoboków opisanych na Trójkącie  $ABC$ , tak się mieć

mieć będzie do summy Równoległoboków opisanych na Trójkącie  $abc$ , iak podstawa  $AB$ , pierwszego Trójkąta, do podstawy  $ab$ , drugiego; to jest: przez przypuszczenie, iak summa, z Trójkąta  $ABC$ , i z Równoległoboku  $ABFE$ , do Trójkąta  $abc$ . A że zrobiliśmy pierwszy poprzednik mnieyszym od drugiego, więc też i pierwszy następnik byćby powinien mnieyszy od drugiego; to jest summa wszystkich Równoległoboków opisanych na Trójkącie  $abc$ , powinnaby być mniejsza od Trójkąta  $abc$ , co jednak być nie może; a z tym stosunek podstaw tych dwóch Trójkątów, tenże sam jest, co i samych Trójkątów.

Podobnym sposobem możnaby okazać, że i drugi Trójkąt  $abc$ , nie powinien być powiększony, aby miał ten sam do Trójkąta  $ABC$ , stosunek, co i ich podstawy.

**Przykt. 2.** Niech Trójkąty  $ABC, abc$ . wystawiają dwóch Ostrosłupów przecięcia przechodzące przez wierzchołki  $C, c$ ; i przez 'prostopadle spuszczone od tych wierzchołków do podstaw Ostrosłupów. Niech te obadwa Ostrosłupy, będą jednakiej wysokości. Trzeba dowieść, że byłobyści tych Ostrosłupów, tak się ma-  
ia

ią do siebie, iak ich podstawy, a to z własności Graniałostupów iednakowey wysokości, które także w takim iak ich podstawy stosunku są do siebie, czego się już wyżej dowiodło.

Okaże się, w podobny sposób, że opisałwszy i wpisawszy iednemu z tych Ostrostupowi, Graniałostupy, równey wszystkie wysokości; różnica wpisanych od opisanych, równać się będzie naywiększemu Graniałostupowi opisanemu, i że można w to potrafić, aby ta różnica mniejsza była niż iakikolwiek Graniałostup oznaczony; a tym bardziey różnica Ostrostupa od każdej z tych summ mniejsza będzie, niżeli ten Graniałostup.

Wpisawszy i opisałwszy drugiemu Ostrostupowi, tyle co i pierwszemu Graniałostupów; summa tych wszystkich Graniałostupów opisanych na pierwszym Ostrostupie, tak się mieć będzie do summy opisanych na drugim, iak podstawa pierwszego Ostrostupa, do podstawy drugiego. Także i summy Graniałostupów wpisanych, w tym samym stosunku będą, co i podstawy dwóch Ostrostupów.

Gdyby to albowiem być mogło, aby stosunek dwóch tych Ostrostupów, nierówny



wny był stosunkowi ich podstaw, tedy  
 jeden z tych Ostrosłupów, byłby nap: nad-  
 to mały na ten stosunek. Przydaymy mu  
 więc tę ilość, którą powiększony, zacho-  
 wa ten stosunek, i zamieśmy też ilość na  
 Graniałostłup równy z nim podstawy.  
 Temu Ostrosłupowi wpiszy i opiszy  
 Graniałostłupy jednakiey wysokości, tak  
 jednak małe, aby różnica sumy Grania-  
 łostłupów wpisanych od opisanych, mniej-  
 sza była od różnicy naznaczoney; bę-  
 dzie tym bardziey różnica sumy Gra-  
 niałostłupów opisanych na tym Ostrosłu-  
 pie, od tegoż Ostrosłupa mnieysza, niżeli  
 różnica naznaczona; a zatym summa  
 tych Graniałostłupów mnieysza będzie ni-  
 żeli summa z Ostrosłupa i z różnicy na-  
 znaczoney.

Na drugim Ostrosłupie opiszy tyleż  
 co i na pierwszym Graniałostłupów.

Summa wszystkich Graniałostłupów o-  
 pisanych na pierwszym Ostrosłupie, tak  
 się mieć będzie do sumy Graniałostłu-  
 pów opisanych na drugim Ostrosłupie, jak  
 podstawa pierwszego Ostrosłupa, do pod-  
 stawy drugiego; to jest: jak summa z  
 pierwszego Ostrosłupa, i z różnicy tego  
 mniemanej, do drugiego Ostrosłupa.

Aże

Aże się pokazało, iż pierwszy poprzednik mniejszy jest od drugiego, więc i pierwszy następnik powinienby być mniejszy od drugiego, co jednak być nie może.

Więc stożnek dwóch tych Ostrośkopów, nie różni się od stożku ich podstaw,

107. Uwaga. Użyliśmy już tego sposobu, mówiąc o kwadrowaniu koła, w Części I. Dowiedliśmy albowiem, iż obwody dwóch Wielokątów foremnnych, z jednaką liczbą boków, wpisanych, lub opisaných, dwóm kołom, tak się do siebie mają, jak tych kół promienie; pokazaliśmy oraz, iż różnica obwodu koła, od obwodu Wielokąta wpisanego, lub opisanego, mniejszą być może od jakiegokolwiek ilości naznaczoney, wywiedliśmy zaś proporcjonalność okręgów kół, do ich promieni. Dowiedliśmy także równości kół z Trójkątem mającym za wysokość promień jego, a za podstawę, okrąg; a to z podobney własności Wielokąta na kole opisanego,

W którymkolwiek z tych przykładów, nap: w ostatnim, koło jest granicą między Wielokątami wpisanymi, i opisanymi, do  
które

którey każdy z nich, tym bardziej się zbliża, im więcej boków mu damy, tak dalece, że przyść można do tego, iż ich obwody różnić się od siebie będą mniej-szą ilością, niż iakakolwiek ilość naznaczona, atym mniej jeszcze różnić się będą ich obwody od okręgu koła. Wielokąty podobne na dwóch kołach opisane, zawsze tę mają własność, iż są proporcjonalnemi tychże koł promieniom. Łącząc te z sobą własności, wypadło z nich, że i granice tych Wielokątów, to jest koła, też samę własność mają; lubo choćby je na więcej coraz częstek podzielić (byleby ich liczba była skończona) nieprzyjdziemy nigdy do tego, abyśmy całę zgubili tę różnicę która zachodzi między Wielokątem, i kołem, to jest, abyśmy Wielokąt całę na koło iemu równe zamienili.

Ten sposób postępowania, nazywa się *sposobem wyczerpania* (Methodus exhaustionis) używanym bardzo często u dawnych, którym się to, i sprawiedliwie niezdawało, aby linie krzywe uważać iak złożone z liczby bardzo wielkiej, małych lini prostych; powierzchnie zaś krzywe, aby uważać iak zbior bardzo wielu powierzchni płaskich, małości nad-

L                      zwy

zwyczajney; bryły także krzywe, aby uważać iak *Wielościany* (Polyedra) bardzo wielką liczbę, boków mające.

Potych, które się tu dały objaśnieniami, obeydziesię w następujących podaniach, bez powtarzania za każdym razem całego ciągu tego sposobu *wyczerpania*. Dość będzie okazać, że powierzchnie krzywe i Bryły niemi zakończone, o których mamy mówić, zawarte zawsze są między powierzchniami lub Bryłami, o których już mówiliśmy, a które mogą się różnić od siebie mniejszą ilością, niż iakako wielkość podana. Gdy zaś przyjdzie mówić o ścianach Brył, o ich *warsztach* (laminæ) i t. d, tedy rozumiem, że przez poprzedzające obszernie objaśnienia, dość się wytłumaczyło, iak dalecy być powinniśmy od uważania powierzchni krzywych, iakoby złożonych z płaszczyzn, i od uważania Brył, iakoby złożonych z powierzchni ułanych iednych nad drugimi.

ROZ-

# ROZDZIAŁ VII.

## O Walcach.

108

~~108~~ Niech będą dwa koła równe nakreślone na dwóch płaszczyznach równoodległych. Przez linią łączącą ich środki, niech przechodzi iakokolwiek inna płaszczyzna. Niech będą złączone inną linią końce dwóch promieni znajdujących się po jednej stronie linii łączącej środki, i służących za wspólne przecięcia tej płaszczyzny z płaszczyznami dwóch koł; niechay ta linia końce dwóch promieni łącząca obraca się równym wżyskich iey punktów ruchem, około okręgów tych dwóch koł. Powierzchnia krzywa obrotem tym linii naznaczona, nazywa się *powierzchnią Walcową*. Bryła zakończona temi dwoma kołami, i tą powierzchnią zowie się *Walcem* (Cylinder:) Linia prosta łącząca środki tych dwóch koł, nazywa się *Ośią tego Walca*. (Axis) Dwa koła na których się Walec kończy, nazywają się *jego podstawami*. Prostopadła spuszczone od punktu któregokolwiek, jednej z tych podstaw do płaszczyzny podstawy drugiej, nazywa się *wysokością Walca*. Gdy oś

L2. Walca



Walca, albo linia łącząca środki dwóch podstaw jego, prostopadłą jest do płaszczyzn podstaw, Walec zowie się *prostym*, gdy zaś ta oś jest pochyłą do tychże płaszczyzn, wtedy Walec zowie się *ukośnym*.

109. *Wniosek.* Linia robiąca obrotem swoim powierzchnią walcową, równoodległą jest w początkowym swoim położeniu, od osi walca [bo ta linia z osią, czyni dwa boki przeciwne w Czworokącie tym, którego dwoma innemi bokami, są dwa promienie koł równe i równoodległe]. Ze zaś ta linia zawsze jest od pierwszego swego położenia równoodległą, więc zawsze będzie równoodległą od osi. Wzajemnie, gdy przez punkt którykolwiek powierzchni walcowej pociągniemy linią, równoodległą od osi, ta linia zmiesza się z linią która obrotem swoim kreśli powierzchnią Walca, a przez tenże punkt przechodzi, i cała ta linia znajdować się będzie na powierzchni walcowej. Linia równoodległa od osi, a przechodząca przez punkt którykolwiek powierzchni walcowej, nazywa się *bokiem* Walca; wszystkie zatym boki Walca są równe, a w szczególności równają się osi.

110. *Twierdz. 1.* Przeciawszy Walca płaszczyznę równoodlgłą od podławy, przecięcie to będzie kołem.

Niech będzie CAac, połowa przecięcia Walca, od płaszczyzny przechodzącej przez oś jego Cc, i niech BD będzie spólnym przecięciem tej płaszczyzny, i drugiej równoodległej od podławy. *Tab. V. Fig. 1.*

Przecięcie Walca przez tę drugą płaszczyznę, będzie kołem.

*Dowodz.* Bok Aa, Walca jest od osi Cc równoodległym; przecięcia także BD, CA płaszczyzny przechodzącej przez oś, i dwóch płaszczyzn równoodległych, są równoodległym; więc Czworokąt: ACBD, jest Równoległobokiem, a zatem bok BD, równa się bokowi AC.

Tymże sposobem okazać można równość wszystkich linii prowadzonych od punktu B, do każdego punktu przecięcia powierzchni Walcowey, przez płaszczyznę równoodległą od podławy; a zatem to przecięcie jest kołem, którego środkiem, punkt B; i wszystkie takie przecięcia są sobie równe, a w szczególności, równe są podławie.

111. *Wniosek.* Ztąd wynika inny sposób, którym wystawić sobie można *rodzenie się* (generatio) iakiegokolwiek Walca, to jest przez ruch koła taki, którymby się to koło w równey zawsze od pierwzszego swego położenia odległości posuwało, a ieden z punktów iego nie schodził nigdy z linii prostej danej co do iey położenia.

W szeregulości zaś, Walec prosty, można uważać iakoby zrobiony obrotem Równoległoboku prostokątnego, około jednego z boków iego.

112. *Twierdż:* 2. Powierzchnia krzywa (g) Walca prostego, równa się Prostokątowi, któryby miał za podstawę, okrąg podstawy Walca, a za wysokość, bok Walca.

*Dowód:* Wpiszmy w podstawę Walca, i opiszmy na niey dwa Wielokąty foremne, z równą liczbą boków, i na tych Wielokątach, iak na podstawach, uważamy iakoby zrobione Graniałostupy proste,

---

(g) Powierzchnią krzywą Walca nazuwamy tę, w którą niewchodzą podstawy Walca.

ste, także co i Walec wysokości; powierzchnie pobocznych ścian tych dwóch Graniastopów równe będą względem Prostokątów mających w sokość Walca; podst. wy zaś równe obwodom tych Wielokątów, a zatem te dwie powierzchnie pobocznych ścian Graniastopów, tak się mieć do siebie będą, jak obwody tychże Wielokątów. Tym mniej więc różnić się od siebie będą te dwie powierzchnie, im mniej brakować będzie tym Wielokątom do równości, to jest, im większa liczba będzie ich boków; i różnica tych powierzchni mniejsza być może, niż jakakolwiek ilość naznaczona; a tym bardziej powierzchnia krzywa, może się mniej jeszcze różnić od jednej z tamtych powierzchni; więc (podług tego co się powiedziało o sposobie wyczerpania, i w Rozdziale XIII. Części I.) powierzchnia krzywa Walca prostego, równa się Prostokątowi mającemu wysokość tego Walca, a podstawę równą okręgowi podstawy jego.

113, *Wnioſki* 1. Powierzchnie krzywe Walców prostych, iednakiey wysokości, tak się do siebie mają, jak promienie ich podstaw.

2. Powierzchnie krzywe Walców prostych mających równe podstawy, są do siebie, jak ich wysokości.

3. Powierzchnia cała Walca prostego, równa się Prostopłakowi mającemu za podstawę okrąg podstawy Walca, a za wysokość sumę z wysokości Walca, i z promienia podstawy jego, (ponieważ summa z powierzchni dwóch podstaw Walca, równa jest Prostopłakowi mającemu za podstawę okrąg, a za wysokość, promień jednej z tych podstaw). Jest zatem powierzchnia cała Walca prostego proporcjonalna Prostopłakowi, któryby miał za boki, promień podstawy Walca, i sumę z tegoż promienia i z wysokości walca; (gdyż stosunek okręgu do promienia, jest iednostaynym,)

114. *Uwaga.* Można okazać, iż wyznaczenie powierzchni krzywey Walca ukośnego, zawisło od wyznaczenia obwodu przecięcia Walca tego, przez płaszczyznę prostopadłą do jego osi; ale że wyznaczenie tego obwodu, więkzey niż początkowey Geometrii wiadomości wyciąga, przeto nie może być przez nie wyznaczona i powierzchnia krzywa Walca ukośnego.

str. 5.



115. *Twierdź*: 3. Dwa Walce równe są w bryłowości, których tak podstawy iako i wysokości, są równe.

*Dowód*: Wpisawszy, i opisawszy podstawom tych dwóch Walców, Wielokąty foremne, o iednakowey liczbie boków, azrobiwszy na tych Wielokątach, Graniałtoślupy równey z Walcami wysokości, mające ściany równoodległe względem osi tych Walców; różnica Graniałtoślupa opisanego na iednym z tych Walców, od Graniałtoślupa w tenże Walec wpisanego, równać się będzie Graniałtoślupowi mającemu tę samą, co tamte dwa wysokość, a podstawę równą różnicy dwóch ich podstaw. A że różnica tych dwóch podstaw, mnieysza być może, niż iakakolwiek ilość naznaczona; więc też i różnicę dwóch Graniałtoślupów, wpisanego i opisanego, można uczynić mnieyszą od iakieykolwiek ilości naznaczoney, a tym bardziey różnica iednego z tych Graniałtoślupa, od Walca może być mnieyszą uczynioną, niż iakakolwiek ilość naznaczona.

Ze zaś dwa Graniałtoślupy podobne, nap: opisane natych dwóch Walcach są równe, więc też i te dwa Walce są równe.

Walec

wne, (podług tego co się powiedziało o sposobie wyczerpania.)

**116. Twierdzenie 4.** Walce z równymi podstawami, mają się do siebie, iak ich wysokości.

**117. Twierd. 5.** Walce z równą wysokością mają się do siebie, iak ich podstawy.

Dowodzenie tych dwóch Twierdzeń to samo jest prawie, co i dowodzenie Twierdzenia 3; położywszy stosunki nie równości podstaw, lub wysokości, na miejscach stosunków równości.

**118. Wniosek.** Cokolwiek się powiedziało o porównywaniu Graniastopów mających podstawy różnego gatunku, wzyśtko to przytósować można do porównywania Walców z Graniastopami. Walec równy naprzykład jest iakimukolwiek Graniastopowi mającemu równą z nim podstawę i wysokość. Walec tak się ma Graniastopu teyże co i on wysokości, iak podstawa tego Walca, do podstawy Graniastopu, a ztym Walec tak się ma do Graniastopu teyże co i on wysokości, a którego podstawa jest

jest Wielokątem opisany na podstawie Walca, iak podstawa Walca, do podstawy Graniałostłupa, to jest, iak obwód podstawy Walca, do obwodu podstawy Graniałostłupa; nap: Walec, którego wysokość równa się średnicy podstawy jego, tak się ma do Sześcianu tej średnicy, iak okrąg koła, do tejże średnicy wziętej 4 razy.

Gdy Walec równy jest Graniałostłupowi w bryłowości, wysokość ich będzie w stosunku odwrotnym podstaw, i znowu, jeżeli wysokości są w stosunku odwrotnym podstaw, tedy Walec równa się Graniałostłupowi.

Stosunek dwóch Walców, może podobnie, iak i stosunek Graniałostłupów, wyłożonym być w liniach sposobem następującym: Wyrażmy w liniach stosunek ich podstaw; znajdziemy trzecią proporcjonalną do promienia Walca pierwszego, i do promienia Walca drugiego. Do wysokości Walca pierwszego, do wysokości drugiego, i do tej trzeciej proporcjonalnej, szukamy czwartej proporcjonalnej; stosunek promienia Walca pierwszego, do tej czwartej proporcjonalnej, równy będzie stosunkowi bryło-

bryłowatości pierwszego Walca, do bryłowatości drugiego.

*Przykład liczebny.* Niech będzie promień podstawy drugiego Walca, trzy razy tak wielki jak promień podstawy pierwszego; wysokość zaś drugiego Walca, niech będzie cztery razy tak wielka, jak wysokość pierwszego. Trzecia proporcjonalna do promienia Walca pierwszego i do promienia Walca drugiego, będzie 9. razy tak wielka, jak promień pierwszego Walca; a ponieważ wysokość drugiego Walca, 4. razy jest tak wielka jak wysokość pierwszego, będzie więc czwarta proporcjonalna do wysokości pierwszego Walca, do wysokości drugiego, i do tej trzeciej proporcjonalnej, cztery razy tak wielka, jak ta trzecia proporcjonalna, to jest: 36. razy tak wielka jak pierwszy promień, a zatem drugi Walec zawiera w sobie pierwszy, razy 36. Jakoż, gdyby podstawa drugiego Walca zawierała w sobie razy 9. podstawę pierwszego, a wysokość ich była równa, tedy drugi Walec byłby 9. razy tak wielki jak pierwszy; a że nadto wysokość drugiego Walca zawiera w sobie razy 4. wysokość pierwszego, będzie więc i z tej miary drugi Walec 4. razy

razy tak wielki, iak pierwszy, a z obydwóch razem tych miar będzie 36 razy tak wielki, iak pierwszy.

Co się zaś tycze miary liczebney iakiego Walca, ta będzie znaleziona, wyraziwszy nayprzod w liczbach, powierzchnią iego podstawy (podług tego co się powiedziało o powierzchni koła,) a potem rozmnożywszy tę liczbę przez inną, oznaczającą wyfokość Walca.

119. *Uwaga.* Wyznaczenie dokładne tak powierzchni krzywey Walca proste-  
go, iakoteż i całej iego powierzchni; to jest dokładne porównywanie tey powierzchni z powierzchnią prosta, nap: z kwadratem, zawisło od skwadowania koła; a zatym od wyprostowania iego okręgu. Toż mowić i o bryłowości Walca, czyli o dokładnym porównywaniu tey bryłowości z bryłowością nap: Sześcianu.

Wyznaczenie wielkości kawałków Walca, mających zapodstawy, wycinki, lub odcinki koła, zawisło także od wyznaczenia Walca; ponieważ te kawałki tak się mają do Walca całego, którego



są częściami, iak ich podstawy do koła  
 służącego za podstawę temu Walcowi.  
 (h)

## ROZDZIAŁ VIII.

### O Ostrokregach.

120. **D**efin: Niech będzie koło na-  
 kreślone naiakiey płaszczyźnie  
 i niech od punktu nad tą płaszczyzną znay-  
 dującego się, wyciągniona linia lub ni-  
 tka, obraca się około okręgu, tego koła.  
 Powierzchnia krzywa obrotem tym linii  
 lub nitki naznaczona nazywa się *powierz-  
 nią Ostrokregu*; Bryła zakończona przez  
 tę powierzchnią i koło, około krórego  
 nitka się obracała, nazwiemy *Ostrokre-  
 giem* (Conus), koło, na którym Ostro-  
 krąg stoi, nazwiemy *podstawą* iego;  
 wierz-

(h) *Albo niektóre części powierzchni Wal-  
 cowey same przez się wyznaczyć mo-  
 żna; nie można iednak wyznaczyć ich  
 sfosunku do całej powierzchni Walca.  
 Toż mówić o częściach Walca, których  
 bryłowości mogą być wyznaczone.  
 Ale ta rzecz bardziey jest ciekawa, niż  
 użyteczna, dla tego też dosyć jest o tym  
 namienić.*

wierzchołkiem zaś, punkt ten, od którego nitka była wyciągnięta. Linia od tego wierzchołku do środka podstawy prowadzona, nazywa się *Ośią* Ostrokągu, a prostopadła spuszczone od wierzchołku do płaszczyzny podstawy: nazywa się *wysokością*. Gdy oś jest prostopadłą do płaszczyzny podstawy, Ostrokągu; Ostrokąg nazywa się *prostym*; gdy zaś ta oś nie jest do płaszczyzny podstawy prostopadłą, Ostrokąg nazywa się *ukośnym*.

121. *Wniosek*. Poprowadziwszy linią od wierzchołku Ostrokągu do któregośkolwiek punktu Okręgu podstawy jego, ta linia zmiesza się wtedy z nitką rodzącą obrotem swoim, powierzchnią Ostrokągu, gdy ta nitka przechodzić będzie przez ten punkt okręgu podstawy; a zatem ta linia cała będzie na powierzchni krzywey tego Ostrokągu.

Linia poprowadzona od wierzchołku Ostrokągu powierzchni jego krzywey, aż do okręgu podstawy, nazywa się *łukiem* Ostrokągu.

122. *Twierdza*: 1. Gdy płaszczyzna przechodząca przez wierzchołek Ostrokągu iakiegożkolwiek przecina go, przecięcie to jest zawsze Trójkątem.

*Dowo-*

*Dowódz:* Linie poprowadzone na tey płaszczyźnie od wierzchołku Ostrokregu, do dwóch punktów okregu, w których go ta płaszczyzna przecina, będą bokami Ostrokregu, i spólnemi powierzchnni iego krzywey, z tą płaszczyzną przecięciami; a zatym przecięcie Ostrokregu przez tę płaszczyznę, będzie Tróykątem mającym za podstawę, spólne przecięcie tey płaszczyzny, z płaszczyzną podstawy Ostrokregu, a za boki, dwie linie poprowadzone od wierzchołku, do punktów przecięcia okregu, od płaszczyzny przechodzącey przez wierzchołek,

123. *Twierdz: 2.* Gdy Ostrokrag przecięty jest przez płaszczyznę równoodległą od iego podstawy, przeciecie to jest kołem.

*Tab. V.* Niech Tróykąt ASB wyraża iakiegolwiek przecięcie Ostrokregu od płaszczyzny przechodzącey przez iego Oś, SC; *Fig: 2.* niech linia DFE wyraża spólne przecięcie tey płaszczyzny i inney równoodległej od podstawy.

Tróykąty SCB, SFE, są podobne; więc  $SC : CB = SF : FE$ . Aże płaszczyzna przecinaiąca Ostrokrag równoodlegle od podstawy

podstawy, przechodzi przez punkt nieru-  
chomy F, a przeto trzy pierwsze wyrazy  
tej proporcji są stałe iakiżkol-  
wiek będzie promień podstawy przez  
którą, a razem i przez oś przecho-  
dzi płaszczyzna; więc też i czwarty wy-  
raz jest stałym. Poprowadziwszy tedy  
linię od punktu F, do okręgu przecię-  
cia, te linie równe zawsze będą, a zatem  
to przecięcie jest kołem, którego punkt  
F, jest środkiem.

124. *Wnioſki.* Te koł powierzchnie  
tak się do siebie mają, jak kwadraty ich  
promieni, albo jak kwadraty odległości  
ich od wierzchołka. (To podanie jest  
wielce przydatne w Fizyce.)

Gdy Oſtrokrąg jest prostym, wtedy  
wszystkie płaszczyzny, równoodległe  
od podstawy, są do Osi prostopadłemi; a  
z tą, można uważać Oſtrokrąg prosty,  
jakoby zrobiony obrotem Trójkąta pro-  
stokątnego, około jednego z ramion ką-  
ta jego prostego. To ramie będzie Osią  
Oſtrokręgu, drugie, naznaczy powier-  
chnią podstawy, przeciwprostokątna zaś,  
naznaczy powierzchnią krzywą Oſtro-  
kręgu.

125. *Twierdź: przybrane 1.* Gdy linia poprowadzona na płaszczyźnie podstawy Ostrokągu, dotyka się tej podstawy; płaszczyzna przez tę linię i przez bok Ostrokągu do punktu dotknięcia, ciągniony, przechodząca, wszystkie inne punkta swoje mieć będzie za Ostrokągiem; to jest: nic wspólnego z Ostrokągiem nie będzie miała, oprócz boku, przez który przechodzi,

*Tab. V.* Niech będzie SCA, przecięcie Ostrokągu od płaszczyzny przechodzącej przez Oś SC, i przez podstawy promień CA. Niech AT, będzie stycznią z tą podstawą, wkońcu A, promienia CA; Płaszczyzna przechodząca przez linie: SA, AT, będzie mieć za Ostrokągiem, wszystkie punkta swoje, które nie są w linii SA.

*Dowódz:* Niech płaszczyzna iakakolwiek równoodległa od podstawy, Ostrokąg przecina; niech *ca*, będzie wspólnym przecięciem tej płaszczyzny, i drugiey przez oś przechodzącej; niech jeszcze *at* będzie przecięciem tejże płaszczyzny, i drugiey przechodzącej przez linie: SA, AT. Linie: *ca*, *at*, będą równoodległemi względem linii: CA, AT; a zatem



a zatem kąt  $cat$ , będzie równy kątowi  $CAT$ . Aże kąt  $CAT$  jest prostym, więc prostym także będzie i kąt  $cat$ ; a zatem, oprócz punktu  $a$ , linii  $at$ , każdy inny punkt, teyże linii, będzie w większey od środka  $c$ , odległości, niżeli promień  $ca$ , to jest: niżeli odległość punktu na powierzchni Ostrokregu, i oraz na płaszczyźnie  $cat$ , znajduiącego się, od punktu  $Os$ , do teyże płaszczyzny należącego. Każdy tedy inny punkt tey linii  $at$ , oprócz punktu  $a$ , jest za okręgiem. —

126. *Defin:* O tey płaszczyźnie mowi się, iż się *dotyka Ostrokregu*, która jednę tylko linią ma spólną z powierzchnią krzywą Ostrokregu.

127. *Wniosek.* —Opisawszy Wielokąt na podstawie Ostrokregu, a przez wierzchołek tego Ostrokregu, i przez boki Wielokąta przeciągnawszy płaszczyzny; ponieważ te boki Wielokąta opisanego, służyć będą za podstawy ścian Ostrogranu, wierzchołek zaś iego, będzie ten sam, co i wierzchołek Ostrokregu, więc ściany tego Ostrogranu dotykać się będą powierzchni Ostrokregu. Ostrogran ten nazywa się opisanym na Ostrokregu inny zaś, któryby spólny z Ostrokregiem

M 2

miat

niał wierzchołek, a za podstawę Wielokąt wpisany w podstawę Ostrokągu, nazywałby się w Ostrokąg wpisany.

128. *Twierdza przybrane 2.* Mając dany Ostrokąg proły, można weń wpisać, i opisać na nim dwa Ostrograny ściennne, którychby stołunek powierzchni ściennych bardziey się zbliżał do stołunku równości, niż iakikolwiek naznaczony stołunek nierówności.

Powierzchnie ścienne tych dwóch Ostrogranów, równaią się Tróykątom, mającym za podstawy, obwody podstaw Ostrogranów, a wysokości zaś, równe wysokościom iedney z ścian każdego Ostrogranu; a zatym tak się do siebie mają te Ostrograny, iak te dwa Tróykąty. Aże podstawy tych dwóch Tróykątów, tak się mają do siebie, iak prostopaste spuszczone od środka, do dwóch którychkolwiek boków podstaw Ostrogranu; więc te powierzchnie ścienne, tak się też do siebie mieć będą, iak Tróykąty równey z ścianami Ostrogranów wysokości, a mające za podstawy, te prostopadłe; albo iak Prostokąty, teyże zdwie ma temi Tróykątami podstawy i wysokości. Ze zaś stołunek takich dwóch

Pro-

Prostokątów, może być bardziej przybliżonym do stosunku równości, niż jakikolwiek dany stosunek nierówności, to się tak dowodzi.

Niech będzie SCA, przecięcie Ostrokągu prostego, od płaszczyzny przechodzącej przez oś tego Ostrokągu i przez wysokości SA, SB, dwóch ścian Ostrogránów foremnych, i mających za podstawy, Wielokąty z równą liczbą boków; jeden z tych Ostrogránów niech będzie opisany na Ostrokągu, a drugi weń wpisany.

Tab. V.  
Fig. 4.

Powierzchnia ścienna Ostrogránu opisanego proporcjonalna jest z Prostokątem CA przez SA, a powierzchnia ścienna Ostrogránu wpisanego, proporcjonalna jest Prostokątowi CB, przez SB. Poprowadźmy BD równoległą od SA. Powierzchnia ścienna Ostrogránu, mającego za podstawę, podstawę Ostrogránu wpisanego, a za wysokość linią CD, takby się miała do powierzchni ścienną, Ostrogránu opisanego, jak Prostokąt CB  $\times$  BD do Prostokąta CA  $\times$  AS; to jest (dla podobieństwa Trójkątów SAC, DBC) jak kwadrat z CB, do kwadratu z CA; albo jak powierzchnie podstaw, dwóch Ostro-

Ostrogrądów. A że się dowiodło w Rozdziale o kwadrowaniu koła w Części I. że te dwie powierzchnie bardziey mogą być zbliżonemi do stosunku równości, niż iakikolwiek dany stosunek nierówności, więc też i stosunek powierzchni ściennych, tych dwóch Ostrogrądów, bliższy może być stosunku równości, niż iakikolwiek dany stosunek nierówności. Ze zaś powierzchnia ścienna Ostrogrądu, którego SCA jest przecięciem, mniej się różni od Ostrogrądu, którego przecięciem jest: SCB, niżeli od Ostrogrądu, którego przecięciem jest: DCB, więc tym bardziey stosunek powierzchni ściennych dwóch Ostrogrądów, jednego wpisanego, drugiego opisanego, mniej się różnić może od stosunku równości, niżeli od tegoż stosunku różni się iakikolwiek dany stosunek nierówności.

129. *Twierdż. 3.* Powierzchnia krzywa Ostrokągu prostego, równa się Trójkątowi mającemu za podstawę obwód podstawy Ostrokągu, a za wysokość bok Ostrokągu.

*Dowodz.* Powierzchnia krzywa Ostrokągu prostego jest Granicą między powierzchniami

wierzchniami ściennemi Ostrogranów prostych weń wpisanym i na nim opisanym. Aże stożunek takich dwóch powierzchni Ostrogranów, może być do stożunku równości bardziej przybliżonym, niżeli iakikolwiek dany stożunek nie równości, więc tym bardziej stożunek powierzchni Ostrokreśgu prostego, do powierzchni jednego z tych Ostrogranów, nap: opisanego, mniej się różnić może od stożunku równości, niżeli się od tegoż stożunku różni iakikolwiek dany stożunek nierówności. Ze zaś powierzchnia ścienna Ostrogranu opisanego, równa się Trójkątowi mającemu za wysokość, bok Ostrokreśgu, a za podstawę obwód podstawy, tego Ostrogranu; więc (podług tego co się powiedziało o sposobie wyczerpania, a wszczegulności w Rozdziale o kwadrowaniu koła, że powierzchnia koła, równa się Trójkątowi mającemu za podstawę obwód koła, a za wysokość, promień jego): Powierzchnia krzywa Ostrokreśgu prostego, jest też równa Trójkątowi, któryby miał za podstawę obwód podstawy Ostrokreśgu, a za wysokość bok jego.

130. *Wniosek.* Powierzchnia krzywa Ostrokreśgu prostego, równa się wy-

cinko-



cińcowi koła, któreby miało za promień, bok Ołtrokręgu, a którego łuk równy był w długości okręgowi podstawy Ołtrokręgu; a to dla tego, że powierzchnia tego wycinku, równa się także Trójkątowi, mającemu za wysokość bok Ołtrokręgu, a za podstawę łuk tego wycinku, albo okrąg podstawy Ołtrokręgu.

131. Dla znalezienia ważności katowej, tego wycinku, następująca czyni się proporcya: Jak się ma bok Ołtrokręgu, do promienia podstawy jego, tak się ma  $360^\circ$  do ważności katowej, której szukamy.

Jakoż, gdyby bok Ołtrokręgu, był dwa, trzy, i t. d. razy większy od promienia podstawy, tedy okrąg cały mający za promień bok Ołtrokręgu, byłby dwa, trzy i t. d. razy większy od okręgu podstawy; a zatem i łuk pierwszego koła, któryby się równał okręgowi podstawy, byłby połową, trzecią, częścią i t. d. okręgu, do którego należy.

132. *Defin:* Niech będzie Ołtrokrąg przecięty płaszczyzną równoodległą od podstawy jego, Bryła zakończona z jednej strony, podstawą Ołtrokręgu a z dru-

drugiey tym przecięciem, nazywa się *Ostrokreśnięciem ściętym* (*Conus truncatus*.)

133. *Twierdź: 4.* Powierzchnia krzywa Ostrokreśniętego ściętego, równa się Prośokątowi mającemu za wysokość, bok tego Ostrokreśniętego ściętego, a za podstawę, linią równą takiemu okręgowi, którego promieniem byłby połowa summy promieni do dwóch podstaw Ostrokreśniętego ściętego należących; to jest średnia arytmetyczna między dwoma temi promieniami.

Niech Trójkąt SCA, wyraża połowę *Tab. V.*  
przecięcia Ostrokreśniętego prosteo, odpla- *Fig. 5.*  
szczyny przechodzącej przez oś jego.  
Niech tenże Ostrokreśnięty będzie jeszcze  
przecięty płaszczyzną równoodległą od  
podstawy, a spólnym tej płaszcz-  
czyny z pierwszą przecięciem, niech  
będzie: *ca*. Przecięcie: CAac, oznaczy  
przecięcie Ostrokreśniętego ściętego. Pocią-  
gniemy linią AB, prostopadłą do boku  
SA, i równą okręgowi koła, którego  
promieniem jest: CA. Trójkąt SAB, bę-  
dzie równy powierzchni krzywey O-  
strokreśniętego całego: poprowadźmy jeszcze  
linią *ab*, równoodległą od AB, i spoty-  
kającą w punkcie *b*, linią SB. Ta linia  
*ab*,

*ab*, będzie też równa okręgowi koła, którego, promieniem jest *ca*, a Trójkąt *Sab*, równać się będzie powierzchni krzywej Ołtrokręgu *Sac*; będzie zatem Czworokąt *ABba*, równy powierzchni krzywej Ołtrokręgu ściętego *caCA*.

Podzielmy teraz linią *Aa*, na dwie części równe w punkcie: *E*. i poprowadźmy *EF*, równoodległą od *AB*.

Ta linia *EF*, będzie równa okręgowi koła, którego promień równałby się linii: *ED*, tzn. średniej Arytmetycznej między promieniami, *CA*, i *ca*, dwóch podstaw Ołtrokręgu ściętego; a przeto powierzchnia Czworokąta *ABba*, równa się Prostokątowi *AHGa*, mającemu za wysokość, bok *Aa*, Ołtrokręgu ściętego, a za podstawę linią *EF* równą okręgowi średnie arytmetycznej proporcjonalnej, między okręgami dwóch podstaw tegoż Ołtrokręgu.

134. Uwaga 1. Wyrażenie następujące powierzchni krzywej Ołtrokręgu prostego, czyli to całego, czyli też ściętego, posłuży nam, gdy mówić będziemy o powierzchni kuli (Sphera).

Od

Od środka E, linii Aa, wyciągniemy linią EI prostopadłą do Aa, spotykającą os SC, w punkcie I. Poprowadźmy i drugą linią aL, równoodległą od SC, a prostopadłą do AC.

Summa kątów IED, DEa, równa się kątowi prostemu; tak iako i summa kątów: AaL, DEa; więc te dwie summy są sobie równe; a zatem kąt IED, równa się kątowi AaL. Są tedy podobne, dwa Trójkąty prostokątne: IED, AaL, a zatem boki ich będą proporcjonalne; więc,  $IE : ED = Aa : aL$ , (albo Cc) a ztąd i okręgi, mające za promienie, linie: IE, ED, są też do siebie, iak linie: Aa, Cc; a zatem Prostokąt z linii Cc, przez okrąg, którego linia IE, byłaby promieniem, równałby się Prostokątowi z linii Aa, przez okrąg, któryby miał za promień, linią ED. Aże ten drugi Prostokąt równy jest powierzchni krzywey Ostrókręgu ściętego; więc też i pierwszy byłby równy teyże Ostrókręgu ściętego powierzchni. Jest tedy powierzchnia krzywa Ostrókręgu ściętego, równa Prostokątowi mającemu wysokość równą wysokości Ostrókręgu ściętego, a podstawę równą okręgowi takiego koła, którego promieniem byłaby prostopadła, od środka boku Ostrókręgu ściętego wyciągniona, aż do

iego

iego osi, która to prostopadła jest czwartą geometrycznie proporcjonalną, do wysokości Ostrokągu ściętego, do jego boku, i do średniej arytmetyczney między dwoma promieniami; co wszystko łatwo przyłożyć można i do Ostrokągu ściętego.

135. *Uwaga 2.* Wyznaczenie więc dokładne powierzchni Ostrokągu, lub iey części, zawiśło od wyprostowania okągu koła.

Co się tyczy Ostrokągu ukośnego, iefczce ciężey jest wyznaczyć powierzchnią iego krzywą, niżeli Walca ukośnego; to zaś pochodzi z nierówności iego boków, a zatym z nierówności ścian Ostrogránów, z podstawami foremnymi, opisanymi lub opisać się mogących na tym Ostrokągu.

136. *Twierdz. przybrane* Bryłowatości dwóch Ostrogránów z podstawami foremnymi, iednego wpisanego w Ostrokrąg, a drugiego na nim opisanego, różnica może być mnieysza, niż iakakolwiek ilość naznaczona; to jest stosunek ich bryłowatości, może bardziey być przybliżonym do stosunku równości, niż iakikolwiek dany stosunek nierówności.

*Dowodz:*



*Dowódz:* Różnica tych dwóch Ostrogranów, równa się Ostrogranowi teyże co one wysokości, a którego podstawa byłaby równa różnicy ich podstaw. Aże słounek tych podstaw, może być bardziey przybliżonym do słounku równości, niż dany iakikolwiek inny słounek nie równości, więc też i słounek tych dwóch Ostrogranów, może się zbliżyć do słounku równości bardziey niż inny dany iakikolwiek słounek nierówności. Zamieniwszy różnicę dwóch Ostrogranów, na trzeci Ostrogran teyże co one wysokości, można będzie wpisać i opisać podstawie Ostrokregu dwa Wielokąty, z równą liczbą boków, takie, którychby różnica mnieysza była od podstawy tego trzeciego Ostrogranu, a tym bardziey ieden z Ostrogranów, wystawionych na tych Wielokątach, równey z Ostrokregiem wysokości, mniey się różnić będzie od Ostrokregu, niż iakąkolwiek ilością naznaczoną.

137. *Twierdz. 5.* Bryłowatość iakiegokolwiek Ostrokregu, jest trzecią częścią bryłowatości Walca równey z Ostrokregiem podstawy i wysokości.

*Dowódz:* Ostrograny i Graniaślośupy iednoimienne (eiusdem nominis) wpisane,  
lub

lub opisane, pierwsze na Ostrokręgu, a drugie na Walcu, iednakiey z niemi wysoko-  
ści, są trzecią częścią pierwze względem  
drugich. Aże te Ostrograny i Graniasto-  
py mogą się różnić pierwsze od Ostrokrę-  
gu, drugie od Walca, na którym są nap. o-  
pisane, mniej niż iakąkolwiek daną ilo-  
ścią; więc (podług tego, co się powie-  
działo o sposobie wyczerpania) Ostrokrąg  
jest też trzecią częścią Walca.

138. *Wniosek.* Cokolwiek mówiliśmy  
o porównywaniu Walców, zawisłym od  
ich wysokości, i podstaw, można to wszy-  
stko i do Ostrokręgów przystosować,  
które trzecią ich są częścią; podobnie ia-  
kośmy i to co się mówiło o porównywa-  
niu Graniastożupów, do Ostrogranów  
przystosowali. J tak.

1. Ostrokręgi, których podstawy są  
równe, mają się do siebie, iak ich wyso-  
kości.

2. Ostrokręgi, których wysokości są  
równe, mają się do siebie, iak ich pod-  
stawy.

3. Ostrokręgi, których bryłowatości  
są równe, mają podstawy w stosunku od-  
wrotnym ich wysokości.

4. Ostrokregi, których podstawy mają się do siebie, w stosunku odwrotnym ich wysokości, są równe.

5. Stosunek dwóch Ostrokregów w liniach wyrażony, tak się znajduje: zamienia się stosunek podstawy jednego, do podstawy drugiego na stosunek linii do linii; znajdując trzecią proporcjonalną do promienia podstawy pierwszego Ostrokregu, i do promienia podstawy drugiego. Zamienia się także stosunek wysokości pierwszego Ostrokregu, do wysokości drugiego, na stosunek trzeciej proporcjonalnej znalezionej, do czwartej. Stosunek promienia podstawy pierwszego Ostrokregu, do tej czwartej proporcjonalnej, równy będzie stosunkowi pierwszego Ostrokregu, do drugiego.

6. Wyrażenie liczebne bryłowatości Ostrokregu, znajdziemy; mnożąc liczbę oznaczającą wielkość powierzchni podstawy jego, przez liczbę oznaczającą wielkość wysokości, a potem tej liczby rozmnożonej biorąc część trzecią.

Wyznaczenie tedy dokładne bryłowatości Ostrokregu, zawisło od wyznaczenia

nia dokładnego, iego podstawy, a zatem od wyprostowania okręgu koła.

Bryłowość Ostrokregu, równa się bryłowości iakiegokolwiek Ostrogranu, równey z Ostrokregiem wysokości i podstawy.

139. *Twierdż: 6.* Bryłowość Ostrokregu prostego, równa się bryłowości Ostrokregu innego, którego powierzchnia podstawy byłaby równa, powierzchnia całego Ostrokregu prostego, a wysokość, równa promieniowi koła wpisanego w Trójkąt równoramienny wyrażający przecięcie Ostrokregu prostego od płaszczyzny przez oś iego przechodzący.

Niech będzie  $ASB$  przecięcie Ostrokregu prostego, od płaszczyzny przez oś iego przechodzący.

*Tab. V.* Niech będzie  $SC$  prostopadła do  $AB$ ,  
*Fig: 6.* wysokością, czyli osią tego Ostrokregu. Podzielimy ieden z kątów przy podstawie  $AB$ , nap: kąt  $A$ , na dwie równe części, przez linią  $AD$ , i prowadźmy ją aż do punktu  $D$ , prostopadłej  $SC$ ; od tegoż punktu  $D$ , niech idzie prostopadła  $DE$ .

a zatem  
owna się  
rogranu,  
ści i pod-

DE do SA. Linie równe DC, DE, będą promieniami, koła wpisanego w Trójkąt przechodzący przez oś Ofrokregu.

ó Ofro-  
watości  
owierz-  
owierz-  
, a wy-  
a wpisa-  
y wyra-  
prostego  
rzecho-

Powierzchnia podstawy Ofrokregu, tak się ma do jego powierzchni krzywey, iak AC. do AS; a zatem powierzchnia podstawy, tak się mieć będzie do całej powierzchni Ofrokregu, iak AC do  $AC+AS$ , albo iak  $AC^2$  do  $AC(AC+AS)$ ; więc powierzchnia cała Ofrokregu równa się kołu mającemu za promień średnią geometryczną między promieniem AC podstawy Ofrokregu, i sumą z tego promienia iz boku Ofrokregu. Aże linia AD, dzieli kąt CAS na dwie równe części więc  $AS : AC = SD : CD$ ; i  $AS+AC : AC = SD+CD : CD$ ; a nakoniec  $(AS+AC) : AC = SC : CD$ .

Ofrokreg.  
z oś ie-

do AB,  
okregu.  
podsta-  
ne czę-  
ści i  
; od te-  
topadła  
DE

Więc Ofrokreg mający za promień podstawy, średnią geometryczną między AC, i  $AC+AS$ , a za wysokość linia CD, miałby powierzchnia swoja, do powierzchni Ofrokregu podobną, w stosunku odwrotnym wielkości; a zatem te dwa Ofrokregi byłyby równe. Ze zaś pod-

N stawa



flawa pierwszego Ostrokregu jest równa całej powierzchni Ostrokregu podanego; więc bryłowość Ostrokregu prostego, równa się bryłowości Ostrokregu innego, mającego podstawę równą całej prostego Ostrokregu powierzchni, a wysokość równą promieniowi koła wpisane go w Trójkąt, który jest przecięciem tego Ostrokregu od płaszczyzny przechodzącej przez oś jego.

## ROZDZIAŁ IX.

### O Kuli.

140. *Defin.* Niechby Połkole obracało się około swej średnicy. Okrąg jego przebiegnie, tym swoim obrotom powierzchnią krzywą, którą nazwiemy *Powierzchnią kulistą* (*superficies spherica*); całe zaś połkole obiegnie miejsce tą powierzchnią krzywą zakończone, które się nazywa *Kulą* (*Sphera* albo *Globus*).

Podczas tego obrotu, każdy punkt okręgu połkola, w jednakowej zawsze byłby od jego środka odległości; a zatem i każdy punkt powierzchni kulistej, w jednakowej też będzie odległości od tego środka.

Kula

Kula więc jest bryłą zakończoną przez powierzchnią krzywą, której wszystkie punkta jednakowo są odległe od pewnego punktu nazwanego *środkiem*.

Odległość środka od punktu któregokolwiek powierzchni kuli, nazywa się *promieniem*. Linia każda przechodząca przez środek kuli, a po obydwóch stronach kończąca się na jej powierzchni, nazywa się *średnicą*, i dwa razy jest większą od promienia. Ta zaś średnica, około której obracając się po kole, zrobiło kulę nazywa się *Ośią* kuli.

Gdybyśmy przecieli kulę płaszczyzną przechodzącą przez jej środek, wszystkie punkta przecięcia powierzchni kulistej, przez tę płaszczyznę, byłyby jednakowo odległe od środka kuli, który na tymże jest przecięciu.

Więc takie przecięcie jest kołem mającym za promień, promień kuli.

Przecięcie kuli od płaszczyzny, która przez jej środek przechodzi, nazywa się *większym kołem kuli*.

Dwa takie koła przecinały się, jedno z drugim na dwie części równe.

N<sub>2</sub>

Jakoż

Jakoż wspólne ich przecięcie przechodzi, przez środek kuli, a zatem i przez środek tak jednego, iak i drugiego koła; więc jest średnicą obydwóch. Aże średnica przecina koło na dwie równe części, więc i dwa koła wielkie kuli przecinaią się na dwie części równe.

Gdyby kula przecięta była płaszczyzną nie przechodzącą przez iey środek, ale prostopadłą do osi iey obrotu, przecięcie to kuli byłoby kołem od wspólnego przecięcia tej płaszczyzny z płaszczyzną polkola, narysowanym, pod czas obrotu tegoż polkola tworzącego kulę.

Ze zaś można sobie wytworzyć w myśli, kulę daną, iakoby utworzoną przez obrot któregośkolwiek polkola wielkiego, około iego średnicy, i kula z tego obrotu powstała, iednakowey zawzię jest wielkości; więc gdziekolwiek przetniemy kulę płaszczyzną, wszędzie przecięcie iey, będzie kołem; ponieważ można wziąć za oś kuli, tę iey średnicę, która do tej płaszczyzny jest prostopadłą.

Przecięcie kuli od płaszczyzny nie przechodzącej przez iey środek, nazywa się *matym kołem*.

Gdy

Gdy przez koniec promienia kuli, przechodzi płaszczyzna prostopadła do tego promienia, wszystkie inne punkta tej płaszczyzny będą za kulą.

Jakoż odległość któregokolwiek innego punktu tej płaszczyzny, od środka kuli, jest przeciwprostokątną Trójkąta prostopadłego, który ma za przeciwprostokątną promień, a za drugie, odległość tego punktu, od końca promienia. Widać że tedy inne punkta tej płaszczyzny są pośrodku odległości większą, niżeli jest promień, a zatem są za kulą.

O płaszczyźnie, nie mającej ani mieć mogącej więcej nad jeden punkt spólny z kulą, mówi się, iż jest kuli *cołyka*. Ta zaś płaszczyzna powinna być prostopadłą do promienia, poprowadzonego do punktu dotknięcia.

Przez punkt dotknięcia pociągnąwszy na tej płaszczyźnie jakąkolwiek linię prostą, ta będzie prostopadłą do tego promienia, który do punktu dotknięcia byłby poprowadzony; a zatem linia ta, będzie styczną z tym kołem, któreby było przecięciem

cięciem kuli od płaszczyzny przechodzącej przez tę linię, i przez ten promień.

Jakośmy się zatrudniali wyżej około Walców, i Ośtokręgów prostych, tak teraz zatrudniać się będziemy około powierzchni i brylowatości kuli, i iey części różnych.

141. *Twierdz. przybrane.* Niech będzie łuk koła, przez którego punkt średni poprowadziliśmy styczną, aż do iey zeyścia się z obydwóch strom, z promieniami przez końce tego łuku przeciągnięmi.

Takiedną, iak i drugą połowę tego łuku, podzielimy na dwie części równe i przez punkta podziału, poprowadźmy znowu dwie styczne aż do ich zeyścia się z promieniami przeciągnięmi przez końce tych połów.

Część promienia przeciągniętego, zawarta między okręgiem, i pierwszą styczną, więcey niż dwa razy większa iest od części zawartej między okręgiem, i iedną z drugich dwóch stycznych.

ab. VI. Niech będzie ADB, łuk koła, przez którego punkt średni D, poprowadzona iest styczna



na spotykającą w punktach E, i e; promienie CB, CA przedłużone. Przez średnie punkta. F, i f, łukow: BD, AD, poprowadźmy styczne: GH, Gh, które spotykają w punktach: G, H, h, promienie przechodzące przez końce łuków: BD, AD.

Trzeba dowieść, iż linia BE, więcej niż dwa razy jest większa od linii BH.

Niech linia CF, spotyka w punkcie L, linią Ee; Trójkąty: CDL, CFG, mogą przytłać do siebie, więc linie: DG, albo BH, i FL, są równe.

Poprowadźmy cieńciwę BD, którą linia CL spotyka w punkcie I, i BM równoodległą od CL.

Trójkąty prostokątne: BDM, JDL, są do siebie podobne; a że BD dwa razy jest większa od DI, więc też i BM, dwa razy większa będzie od JL; a zatem BM, więcej niż dwa razy większa jest od FL albo BH. Ze zaś w Trójkącie EBM, kąt M, jest rozwarty, a prz. to linia BE, większa od linii BM; więc tym bardziej linia BE, więcej niż dwa razy większa jest od linii BH.

142. *Wniosek 1.* Niech będzie promień CN, prostopadły do promienia CA. Od punktów: M, I, B, spuścimy prostopadłe: HO, HP, BQ do promienia CN; stosunek bity: HB, IB, równy będzie stosunkowi bity OQ, IQ. Alz IB więcej niż dwa razy jest większa od BI, więc i OQ więcej niż dwa razy większa też będzie od PQ.

143. *Wniosek 2.* Gdy daley dzielić będziemy łuk AB, na części równe; 4, 8, 16, 32, i t. d. i przez punkta średnie podziałów, połączymy stycznae, aż do ich zbieżcia się z promieniami przechodzącymi przez końce każdego w szczególności podziału; gdy nadt, od punktu, w którym ostatnia styčna spotyka promień przedłużony CN, spuścimy prostopadłą EO, na promień CN; różnica między odległością spodka Q, tej prostopadłej, od środka C, i odległością od tegoż środka C, spodka Q, prostopadłej BQ, z końca B, łuku AB spuszczoney, ta mowię różnica zmniejsza się więcej niż połową za każdym następującym podziałem, a zatem może się na ostatek stać mniejszą od jakiegokolwiek ilości naznaczoney.

144. *Twierdź:*

144. *Twierdza. I.* Niech będzie łuk koła, mniejszy od czwartej części okręgu jego; i niech ten łuk obraca się około promienia prostopadłego do drugiego promienia, który przechodzi przez jeden koniec tego łuku. Z drugiego jego końca spuścmy prostopadłą na pierwszy promień, to jest na oś obrotu łuku.

Część powierzchni kuli utworzona, tym około osi obrotu łuku, równa się Prostokątowi, mającemu za podługę linią równą całemu okręgowi, którego ten łuk jest częścią; a za wysokość, linią równą odległości środka, od spodka prostopadłej spuszczonej na oś obrotu: powierzchnia zaś cała kuli czterzy razy jest większa, niżeli powierzchnia wielkiego koła, teyże kuli.

Niech będzie łuk ADB; niech promień *Tab. VI*  
CN, będzie prostopadłym do promienia *Fig. 1.*  
CA, przechodzącego przez jeden koniec  
tego łuku.

Poprowadźmy BQ, prostopadłą do CN.  
Niech koła czwarta część ABN, obraca  
się około promienia CN, iak około osi  
swiecy. Powierzchnia krzywa, obrotom  
łuku AB naznaczona, równa się Prosto-  
kątowni

kątowi, któryby miał za wysokość, linią CQ, a za podstawę, linią równą okręgowi, którego CA jest promieniem.

*Dowódz:* Niech styczna Ee, przechodzi przez średni punkt D. łuku AB, i niech spotyka w punktach E, i e, promienie przechodzące przez dwa końce tego łuku,

Dzielimy daley łuk AB, na części równe: 4.8.16.32, i t. d. a od punktu, w którym ostatnia styczna spotyka promień CB, przy każdym następującym podziale, spuszczaemy prostopadłą na promień CN. Różnica między odległością środka, od spodka tej prostopadłej, a linią CQ, zmniejszać się będzie więcej niż połową, za każdym następnym podziałem; więc różnica ta, może się nastatek stać mnieyszą, niż iakakolwiek ilość naznaczona.

Podczas obrotu łuku AB, około linii CN, każda styczna kreśli powierzchnią krzywą Ołrokręgu ściętego równającą się Prostopłątowi mającemu za podstawę, linią równą okręgowi, którego promieniem, jest CN, a za wysokość, odległość dwóch prostopadłych spuszczo-  
nych

linią  
okrę-

zacho-  
AB, i  
romie-  
e tego

ei ró-  
tu, w  
a pro-  
niącym  
tę na  
legło-  
adley,  
wię-  
pnym  
że się  
olwiek

o linii  
cznia  
niającą  
stawę,  
pro-  
odle-  
czzo-  
ych

ných na oś, od końców tey styczney;  
a zатыm summa powierzchni krzywych,  
zrobionych od wszystkich tych styczn-  
nych, równa się Prostokątowi, mające-  
mu tę samę podstawę a wysokość ró-  
wną summie wszystkich tych wysokości;  
to iest równą odległości środka, od spod-  
ku prostopadley spuszczoney na oś z  
punktu tego, gdzie ostatnia styczná spo-  
tyka promień CB. Może tedy różnica  
summy powierzchni krzywych Ostrokre-  
gu zrobionych obrotem wszystkich styczn-  
nych, mnieysza być od Prostokąta z tą-  
iaki się wyżej powiedziało podstawą a  
z wysokością CQ, niżeli iakakolwiek ilość  
naznaczona. Summa zaś tych wszyst-  
kich powierzchni krzywych, większa  
iест zawsze od powierzchni utworzoney  
obrotem łuku AB; więc (podług tego,  
co się powiedziało o sposobie wyczer-  
pania, i w Rozdziale o kwadrowaniu ko-  
ła) powierzchnia krzywa utworzona o-  
brotem łuku AB, równa się Prostokąto-  
wi, mającemu za podstawę, okrąg, któ-  
rego promieniem iest CA, a za wysokość,  
odległość CQ, środka C, od spodku Q,  
prostopadley spuszczoney na oś z końca  
B, tego łuku.

Mowiąc w szczególności; powierzchnia  
Półkuli (Hemispherium) utworzoney o-  
bro-



brotem czwartej części koła,  $ABN$ , równa się Promiennowi mającemu za podstawę okrąg, którego,  $CA$  jest promieniem, a za wysokość, promień  $ON$ .

A zatem powierzchnia krzywa, utworzona obrotem łuku  $BN$ , równa się Prostokątowi mającemu za wysokość  $NQ$ , a podstawę równą okręgowi wielkiego koła kuli.

Powierzchnia także całej kuli, równa się Prostokątowi mającemu za wysokość średnicę kuli, a za podstawę, okrąg wielkiego jej koła, Albo powierzchnia wielkiego koła równa się Prostokątowi mającemu za wysokość połowę promienia, albo czwartą część średnicy, a okrąg tego koła, za podstawę.

Wiedząc powierzchnia kuli cztery razy jest większą od powierzchni wielkiego jej koła, którego promień równa się średnicy kuli.

15. Idzie zatem, że powierzchnia kuli, tyle jest, co powierzchnia kwadratu jej średnicy, jak powierzchnia koła tak wielkiego łuku, cztery razy większa, do kwadratu średnicy tegoż koła: Albo powierzchnia

wierzchnia kół, jest do powierzchni kwadratu średnicy jego, jak okrag kół do iey średnicy cztery razy wziętey iakosię w Rozdziale III. Części I. dowiodło) więc powierzchnia kuli tak się ma do powierzchni kwadratu iey średnicy, iak cztery razy okrag kół, do średnicy jego cztery też razy wziętey, to iest) iak okrag kół, do średnicy średnicy. Więc wyznaczenie dokładne powierzchni kuli, zawisło od skwadrowania kół, i od wyprostowania okręgu jego.

146. Powierzchnia cała kuli, tak się ma do powierzchni nakręśłoney obrotiem łuku NP, iak się ma średnica kuli, do linii NQ, albo iak kwadrat tej średnicy, do prostokąta z linii NQ, i z średnicy; albo nakręśłone, iak kwadrat średnicy, do kwadratu linii NE; a zatem, iak kóło, któreby miało za promień tę średnicę, do kóło, któreby miało za promień linią NB; aż- powierzchnia kuli równa się powierzchni pierwotnego kóło; więc powierzchnia nakręśłona obrotiem łuku NP, równa się powierzchni drugiego kóło.

Niech będzie NEFA, półkóło tworzące Tab. VI.  
obrotem swoim kulę, niech będzie; NI DA Fig. 2.  
Pro-

Prostokąt, którego podstawą jest średnica tego połkola, a wysokością promień jego. Podczas obrotu połkola, ten Prostokąt utworzy Walec prosty, którego powierzchnia krzywa z obrotu przez obrot linii ED, równać się będzie Prostokątowi mającemu za wysokość średnicę DE, albo AN, a za podstawę okrąg podstawy tego Walca, a zatem ta powierzchnia krzywa, równa się powierzchni kuli.

147. Podobnie się okaże, iż poprowadziwszy linią QBP, prostoprędką do osi, powierzchnia krzywa należąca do Walca, a zrobiona przez obrot linii EP, równa jest powierzchni należącej do kuli, a zrobionej przez obrot łuku NB.

148. Walec utworzony obrotem Prostokąta ADEN, miałby wysokość równą średnicy podstawy swojej; dotykałby się w punktach: A, i N, kuli utworzonej obrotem połkola AFBN; dotykałby się iey także w okręgu, którego promieniem byłby promień CF kuli.

O takim Walcu mówi się, iż jest na kuli opisanym. Nazywa się on także i Walcem Archimedesowym, od nazwiska tego Matematyka, który pierwszy znalazł równość

średnica  
nienie-  
Prosto-  
go po-  
z obrót

okątowi  
ę DE,  
podstawy  
równia  
kuli.

prowa-  
do osi,  
o Wal-  
EP, ro-  
do kuli,

m Pro-  
równą  
by się  
ney o-  
by się  
nieniem

na ku-  
i Wal-  
go Ma-  
zł ró-  
ość

wność powierzchni kuli z powierzchnią krzywą tego Walca, iako też i stosunek ich brylowatości.

149. Powierzchnia jednej z dwóch podstaw tego Walca, równa się Prostopłkątowi z okręgu tej podstawy, i z połowy iey promienia; a zatem powierzchnia obydwóch razem tych podstaw, równa się Prostopłkątowi z okręgu jednej podstawy, i z iey promienia. Aże powierzchnia krzywa Walca, równa jest Prostopłkątowi z okręgu podstawy iego, i z średnicy teyże podstawy, albo z promienia dwa razy wziętego; więc powierzchnia cała Walca, równa jest Prostopłkątowi z okręgu iego podstawy, i z promienia trzy razy wziętego; a zatem powierzchnia krzywa tego Walca jest  $\frac{2}{3}$  powierzchni iego całej; a przeto i powierzchnia kuli jest też  $\frac{2}{3}$  powierzchni całej Walca naniey opisanego.

150. Uwaga. To, co się dotąd powiedziało, trzeba przystosować do niektórych przykładów liczebnych podobnych następującemu.

Przykt. Jakaż jest wielkość powierzchni Ziemi w milach kwadratowych Niemieckich, rachując na stopień, mil

25?

Niech będą dwa koła wielkie Ziemi, jedno prostopadle do drugiego. Podzielmy okrąg iednego z tych koł, napr: co dzieścię, albo co pięć stopniów, i przez punkta podziału niech przechodzą płaszczyzny równoodległe od koła drugiego. Trzeba znaleźć wielkość powierzchni zawartych między dwoma naybliższemi od siebie podziałami.

Wszczegulności zaś, jeżeli uczniowie mają wiadomość porządkową Geografii, mogą wyrachować dwie powierzchnie zawarte między kołami, z których iedno odległe jest od *Równika* (aequator), na  $23^{\circ} \frac{1}{2}$ , a drugie od *Biegunu* (polus) także na  $23^{\circ} \frac{1}{2}$ .

Tob. VI. Niech będzie CF promieniem iednego  
Fig. 2 koła wielkiego; niech NBF. wyraża czwartą część drugiego koła do niego prostopadłego; niech BQ, bq, będą przecięciami tego koła prostopadłego i dwóch płaszczyzn równoodległych od koła, pierwszego.

Powierzchnia krzywa połkuli, tak się ma do powierzchni części zawartej między płaszczyznami CF i BQ, iak się ma promień kuli, do linii CQ, która jest wstawą



wstawą łuku BF. Podobnie i powierzchnia krzywa półkuli, tak się ma do powierzchni części zawartej między płaszczyznami: CF, i bq, jak wstawą całą, czyli promień do wstawy łuku bF, to jest do linii Cq. Można więc wyrachować te części powierzchni półkuli, a zatem i ich różnicę, to jest: część powierzchni zawartej między płaszczyznami: BQ, i bq.

151. *Twierdz. 2.* Bryłowatość kuli równa się  $\frac{2}{3}$  bryłowatości Walca na tej kuli opisanego.

Niech będzie ACBMA czwarta część koła, tworząca Półkulę obrotem swoim około promienia CB. Niech będzie CABD kwadrat opisany na tej czwartej części koła. Ten kwadrat obracając się około CB, utworzy Walec opisany na półkuli, który będzie połową Walca opisanego na całej kuli. Trzeba dowieść, iż Półkula utworzona obrotem czwartej części koła AMBC równa się  $\frac{2}{3}$  Walca utworzonego obrotem kwadratu ACBD. Tab. VI.  
Fig. 3.

Poprowadźmy przekątną CD; Trójkąt BCD utworzy Ostrokąt, którego pod-

podstawa wykreślona będzie promieniem BD, a za wysokość tego Ostrokągu będzie BC; to jest będzie ten Ostrokąg równy z Walcem podstawy, i wysokości.

Od dwóch którychkolwiek punktów nap: P, i p Ci CB wyciągniemy prostopadłe do niej linie: PQ, pq; te przeczną okrąg w M, i m, a linią CD w L, i l; nakerślimy nadto, linie: MN, mn, LO, lo, równoodległe od osi. Kwadrat promienia CM, równa się summie kwadratów z PM, i CP; aże linia PQ równa jest promieniowi, (tak iako BD, CA i CB są równe) i CP równa PL; więc kwadrat z PQ, równa się summie kwadratów z PM, i z PL.

Ze zaś Walce utworzone obrotem Prostokątów Pq, PN, PO, mających iednakie wysokości, są do siebie, iak ich podstawy, albo iak kwadraty promieniów tychże podstaw; więc pierwszy z tych Walców będzie równy summie dwóch innych. Podobnym sposobem okazać można, że Walec Pq równa się summie Walców utworzonych obrotem Prostokątów Pm, i Pl.

Tako.

Takowe dowodzenie ma miejsce chociaż nie od punktów P, i p. ale od którychkolwiek innych będą wywiedzione prostopadłe do osi CB; a zatym podzieliwszy oś, na iakąkolwiek liczbę części równych, a od każdego punktu podziału wyciągnąwszy prostopadłe przecinające tak okrąg iako i linią CD; Summa wszystkich Walców składających Walec ADB, równać się będzie summie wszystkich Walców wpisanych w Półkulę, wraz z summą wszystkich Walców opisanych na Ostrokregu, albo summie wszystkich Walców opisanych na Półkuli, wraz z summą wszystkich Walców w Ostrokrag wpisanych. Aże summa wszystkich Walców wpisanych lub opisanych na Półkuli, może się mnieyszą ilością różnić od teyże Półkuli, niż iakąkolwiek ilość naznaczona; a wtedy i summa wszystkich Walców wpisanych, lub opisanych Ostrokregowi, różnić się też od tego Ostrokregu będzie mnieyszą ilością, niż jest ta ilość dana.

Więc (podług tego, co się powiedziało o sposobie wyczerpania;) Walec utworzony obrotem kwadratu CABD, równa się summie z Półkuli utworzoney obrotem czwartey części koła, i z Ostrokregu utworzonego obrotem Trójkąta BCD.

Aże Ostrokrag utworzony obrotem Tróykąta BC, iest  $\frac{1}{3}$  Walca; więc Półkula utworzona obrotem czwartey części koła AMBC, iest  $\frac{2}{3}$  Walca.

A zatym kula, któraby utworzyła się obrotem Półkola, byłaby też  $\frac{2}{3}$  Walca opisanego na tey kuli, a utworzonego obrotem Prostokąta opisanego na Półkolu tworzącym kulę.

152. *Wniosek 1.* Stosunek bryłowatości kuli do bryłowatości Walca opisanego, ten sam iest co, i stosunek powierzchni kuli, do powierzchni całej Walca opisanego; (149).

153. *Wniosek 2.* Bryłowatość kuli, równa się bryłowatości Ostrokregu, który miał za podstawę, koło równe powierzchni kuli, a za wysokość, promień teyże kuli. Jakoż ten Ostrokrag mając podstawę cztery razy większą od podstawy Walca na kuli opisanego, byłby cztery razy większy od Ostrokregu innego równey z nim wysokości, a mającego podstawę równą z Walcem. Aże ten drugi Ostrokrag, gdyby miał połowę tylko wysokości Walca, byłby połową Ostrokregu mającego równą z Walcem wysoko-

wysokość i podstawę, a zatem byłby połową tego Ostrokągu, który jest  $\frac{1}{2}$  Walca; więc Ostrokąg mający równą z Walcem podstawę, a wysokość równą promieniowi kuli, jest  $\frac{1}{6}$  tego Walca; a zatem Ostrokąg mający za wysokość promień kuli, a podstawę cztery razy większą od podstawy Walca, byłby  $\frac{4}{6}$  albo  $\frac{2}{3}$  Walca. Ze zaś i kula jest  $\frac{2}{3}$  tegoż Walca, więc kula równa się temu Ostrokągowi.

Można to samo jeszcze i w ten sposób okazać:

Niech będzie jakikolwiek *Wielościan* (Polyedrum) którego wszystkie ściany dotykają się kuli: uważając każdą z tych ścian jak podstawę Ostrogranu mającego swoy wierzchołek w środku Wielościanu; bryłowatość tego Wielościanu, równać się będzie bryłowatości jednego takiego Ostrogranu, któryby miał za wysokość promień kuli, a za podstawę sumnę podstaw, Ostrogranów, na które podzielony był ten Wielościan; to jest powierzchnią całą tego Wielościanu.

To podanie zawsze jest prawdziwe, iakąkolwiek będzie liczba ścian tego Wielo-



Wielościanu więc (podług tego, co się mówiło o sposobie wyczerpania,) można by łatwo dowieść, że też i do kuli wszczegulności przytłosowane to podanie, iest prawdziwym, a zatym że kula, równa się Ostrokregowi, któryby miał za wyfokość, iey promień, a za podstawę, całą iey powierzchnią.

154. *Wniosek 3.* Wycinek kuli utworzoney obrotem wycinka kołowego BCM, równy iest Ostrokregowi mającemu za wyfokość, promień tey kuli, a za podstawę, koło, równe powierzchni kulistej, utworzoney obrotem łuku BM; to iest koło, którego promieniem byłaby cieńciwa BM; a zatym bryłowatość tego wycinka, tak się ma do bryłowatości kuli, iak powierzchnia tego wycinka, do powierzchni kuli; albo iak wyfokość BP, do średnicy kuli.

155. *Wniosek 4.* Taż bryłowatość wycinka kuli, utworzonego obrotem wycinka koła BCM, iest  $\frac{2}{3}$  Walca utworzonego obrotem Prostokąta BPQD. Jakkż powierzchnia tego wycinka, tak się ma do powierzchni kuli, iak BP, do średnicy kuli albo iak Walec utworzony obrotem Prostokąta BPQD do Walca opisanego

co się  
można-  
do kuli  
poda-  
e kula,  
y miał  
stawę,

go na kuli. Aże kula jest  $\frac{2}{3}$  Walca na-  
niey opisanego, więc i wycinek kuli, u-  
tworzony obrotem wycinka koła BCM,  
jest też  $\frac{2}{3}$  Walca utworzonego obrotem  
Prostokąta BPQD.

utwo-  
owego  
nające-  
i, a za-  
ni ku-  
BM; to  
byłaby  
ś tego  
ści ku-  
ka, do  
fokość

156. *Wniosek 5.* Podobnie, i część  
kuli utworzona obrotem wycinka ACM  
jest  $\frac{2}{3}$  Walca utworzonego obrotem Pro-  
stokąta CAQP. Aże część kuli (którą to  
część nazwać można *kłosem kulistym*  
(Truncus sphaericus) utworzony obrotem  
części kołowej ACM, jest sumą z wy-  
cinka kulistego utworzonego obrotem  
wycinka kołowego ACM, i z Ostrzkiego  
utworzonego obrotem Trójkąta CPM;  
więc bryłowatość tego kłosa kulistego,  
równa się summie z  $\frac{2}{3}$  Walca teyże z nim  
wysokosci, któryby miał za podstawę,  
koło wielkie kuli, i z  $\frac{1}{3}$  Walca i dnakiey  
także wysokosci, a którego podsta-  
wa byłaby równa drugiemu kołu i loc ten kłó-  
czącemu; a zatym bryłowatość tego  
kłosa tak się ma do bryłowatości Walca  
utworzonego obrotem Prostokąta CAQP,  
iż  $\frac{2}{3} CA^2 + \frac{1}{3} MP^2$  do  $CA^2$ .

watość  
obrotem  
utwo-  
D. Ja-  
tak się  
średni-  
obro-  
pisane-  
go

157. *Wniosek 6.* Aby znaleźć odcinek  
kuli utworzoney obrotem odcinka koło-  
wego BMP; uważamy sobie ten odcie-  
nek

nek kulisty, iak różnicę między Półkula utworzoną obrotem czwartej części kołowej ABC, a kłosem kulistym utworzonym przez obrot odcinka CAMP; albo też iak różnicę wycinka kulistego utworzonego obrotem, wycinka BDM; od Ośrodku utworzonego obrotem Trójkąta CPM; albo nakoniec, iak różnicę Walca utworzonego obrotem Prostokąta BPQD, od Ośrodku ściętego, utworzonego obrotem Czworokąta BDLP.

## ROZDZIAŁ X.

### *O Bryłach podobnych.*

158. Dwie Bryły samemi tylko płaszczyznami powierzchniami zakończone, i których wszystkie kąty bryłowe odpowiadające sobie mogą przystać do siebie, a ściany ich także odpowiadające są podobne; te mówię dwie Bryły nie różnią się chyba samą tylko wielkością, i jedna wzorem jest drugiej. Tak nap: dwa Sześciany, z których jeden ma bok długi na pół stopy, a drugi, na cal jeden, różnią się samą tylko wielkością. Takie Bryły nazywają się podobnemi.

*Przy-*

*Przykłady.* Dwa Równoległościany prostokątne są podobne, gdy ich podstawy i ściany są podobne i edne względem drugich,

Dwa Graniastopy proste, są podobne, gdy podobne są ich podstawy, i gdy wysokość ich proporecyonalna i ednemu z boków, tychże podstaw.

Dwa Ostrograny, mające kąt bryławaty spólny w wierzchołku podobne będą, gdy podstawy ich są równoodległe.

159. *Uwaga.* Gdy dwie Figury prostokreślne, są podobne; wziąwszy punkt iakikolwiek w iedney z tych figur, i poprowadziwszy od tego punktu linie do wszystkich wierzchołków tey figury; można będzie znaleźć i w drugiej figurze punkt podobnie pierwszemu położony; od którego ciągnąc linie do każdego tey figury wierzchołka, podzielimy ją na Trójkąty podobne względem Trójkątów, na które podzielona była pierwsza figura. Podobnie też:

160. *Twierdza:* 1. Wziąwszy w Bryle zakochzoney powierzchniami płaszczyzłmi, punkt iakikolwiek za wierzchołek tylu Ostrogranów, ile ta Bryła ma ścian, biorąc też ściany za podstawy; można znaleźć i w drugiej Bryle podobney, punkt podobnie pierwszemu położony, który wziąwszy także za wierzchołek,

tyluż

tyluż co i w pierwszej Bryle, Ostrogra, nów, wszystkie te Ostrograny będą podobne względem Ostrogranów pierwszej Bryły.

*Przykład.* Weźmy środek Sześcianu za wierzchołek sześciu Ostrogranów, mających za podstawy, ściany tego Sześcianu; gdy w innym jakimkolwiek Sześcianie, weźmiemy także środek za wierzchołek sześciu Ostrogranów mających za podstawy, ściany tego drugiego Sześcianu; te drugie Ostrograny, będą podobne względem pierwszych.

Toż mówić i o innych Bryłach foremnych.

Natym podaniu zasada się cała Nauka o Bryłach podobnych; należy więc nad wyłączeniem iey nieco zabawić się.

Wybrawszy jakikolwiek punkt w Bryle za wierzchołek Ostrogranów mających ściany tej Bryły, za podstawy, i na te Ostrograny, Bryłę podzieliwszy, spuścimy od tego punktu prostopadłą do iedney z ścian tej Bryły; a na ścianie odpowiadającej w drugiey Bryle, weźmy punkt podobnie na tej ścianie położony, iaki spodek prostopadłej spuszczoney na ścianę pierwszej Bryły



Bryły; od tego punktu, na ścianie drugiej Bryły położonego, wyprowadźmy prostopadłą do tej ściany, tak wysoko aby stożunek iey do pierwszej prostopadłej równał się stożunkowi dwóch krawędzi, odpowiadających sobie w obydwóch Bryłach. Wierzch tej drugiej prostopadłej weźmy za wierzchołek wszystkich Ostrogranów, na które, tę drugą Bryłę dzielić mamy. Ostrograny tej drugiej bryły, będą podobne względem Ostrogranów, na które podzielona pierwsza Bryła.

*Dowódz:* Odległości dwóch punktów leżących za wierzchołki Ostrogranów, od wierzchołków odpowiadających sobie w ścianach, do których prostopadłe są ciążnione, te mowią odległości, są przeciwnoprostkątne Trójkątów prostokątnych podobnych, mających za boki te prostopadłe, i odległości ich spodków od wierzchołków kątów ścian tychże. Więc wszystkie ściany tych dwóch Ostrogranów, odpowiadające sobie boki, mają proporcjonalne, to jest mają ię w stożunku dwóch krawędzi odpowiadających sobie w dwóch Bryłach; a zatem wszystkie te ściany, są podobne, i wszystkie ich kąty są równe iedne względem drugich, a przeto i kąty bryłowe które się z nich składają, mogą przystać do siebie; są więc te dwa

dwa Ostrograny podobne. Pochyłości też ścian Ostrogranów do płaszczyzn podstaw są równe iedne względem drugich; aże także równe są pochyłości, tych podstaw do płaszczyzn ścian tych odpowiadających sobie w Bryłach, które ściany spólną krawędź mają z podstawami tych Ostrogranów, więc i ściany odpowiadające sobie w tych dwóch Ostrogranach, będą podobnie nachylone do ścian tych odpowiadających sobie w dwóch Bryłach, a które mają spólną krawędź z pierwszemi dwiema ścianami; to jest z podstawami dwóch tych Ostrogranów.

Na ścianach dwóch, odpowiadających sobie w tych dwóch pierwszych Ostrogranach, spuścimy od ich wierzchołków prostopadłe do podstaw tychże dwóch ścian; a od spodków tych prostopadłych poprowadźmy na ścianach odpowiadających sobie w dwóch Bryłach, inne dwie prostopadłe do tychże dwóch podstaw, ścian Ostrogranów. Oprócz tego, na płaszczyźnie przechodzącej przez dwie w obydwóch bryłach ciągnięne prostopadłe, spuścimy do drugich dwóch prostopadłych, na płaszczyznach ścian odpowiadających sobie, w Bryłach, od tychże co i pierwsze wierzchołków, trzecie dwie prostopadłe; te ostatnie prostopadłe, będą prostopadłemi do płaszczyzn dwóch

nyłości  
n pod-  
ugich;  
h pod-  
powia-  
ściany  
ni tych  
iadaię-  
ch, bę-  
ych od-  
tach, a  
wzemi  
awami

iących  
Ostro-  
olków  
dwóch  
adłych  
iadaię-  
dwie  
odstaw,  
to, na  
przez  
gnione  
dwóch  
ścian  
ch, od  
y, trze-  
prost-  
czyn  
och

dwóch tych ścian odpowiadających sobie, na których ciągnięte były dwie drugie prostopadłe; Trójkąty zawarte trzema temi prostopadłemi, tak w iedney, iak i w drugiej Bryle, będą równokątne, a zatym i podobne. Ażepierwsze dwie prostopadłe ciągnięte na płaszczyznach ścian, dwóch pierwszych Ostrogranów, majątę do siebie, iak krawędzie odpowiadające sobie w dwóch Bryłach; więc też i odległości wierzchołków, tych dwóch Ostrogranów od drugich dwóch ścian także sobie odpowiadających, w tych Bryłach, będą w tymże samym stosunku; i odległości spodków ich, od dwóch krawędzi należących do tych ścian, a odpowiadających sobie, w tymże też stosunku będą.

Spodki prostopadłych spuszczoneych na dwie ściany odpowiadające sobie w pierwszych dwóch Ostrogranach, były podobnie położone na dwóch Brył krawędziach odpowiadających sobie, a zatym odległości tych spodków od końców odpowiadających sobie, tych krawędzi, są do siebie w tymże samym stosunku; a zatym odległości spodków linii prostopadłych spuszczoneych do płaszczyzn drugich dwóch ścian Brył, od końców tychże dwóch krawędzi, będą w tym samym stosunku. Więc na tych dwóch ścianach, spodki prostopadłych podobnie

są

są położone. Ze zaś i wielkości tych prostopadłych są proporcjonalne krawędziom tych dwóch Brył; więc wierzchołki pierwszych dwóch Ostrogrądów, są też podobnie położone względem dwóch ścian drugich, odpowiadających sobie w Bryłach; a zatem i drugie dwa Ostrograny mające spólny wierzchołek, a te dwie ściany Brył za podstawy, będą do siebie podobne.

Toż mówić i o innych Ostrogranach odpowiadających sobie, z których się te dwie Bryły składają. (i)

161. *Twierd: 2.* Powierzchnie Brył podobnych, zakończonych samemi tylko płaszczyzłami powierzchniami, mają się

(i) *To Twierdzenie, jest bardziey długie niż trudne, i łatwiej pojąć je można, mając Figurę przed oczema z drewna, lub z papieru zrobioną. Jużby też nawet po tak wielu Geometrycznych ćwiczeniach powinni wprawieni bydź Uczniowie, aby w myśli samey umieli sobie wystawić Figurę pomagającą do zrozumienia Twierdzenia podanego. a zdawnieyszą do objaśnienia jego, niżby była Figura odrysowana w perspektywie, i przed oczy im stawiona.*

się do siebie, iak kwadraty boków ich odpowiadających sobie, czyli, są w stosunku dwumnożnym tychże boków.

*Dowódz:* Wszystkie ściany dwóch Brył podobnych, po dwie brane są sobie podobne; i tak brane, w iednakowym do siebie są stosunku, to jest w stosunku dwumnożnym, dwóch krawędzi odpowiadających sobie; więc i summa wszystkich ścian kończących iedną Bryłę, będzie do summy wszystkich ścian kończących drugą Bryłę, w tymże samym stosunku.

162. *Twierdż:* 3. Bryłowości dwóch Brył podobnych, są do siebie w stosunku sześciennym dwóch ich krawędzi odpowiadających sobie, czyli, są w stosunku trzymnożnym tychże dwóch krawędzi.

1. Widzieliśmy już, że stosunek iednego Sześcianu do drugiego, ten sam jest, co i stosunek boku pierwszego Sześcianu, do czwartey linii ciągle proporcjonalney; która się znayduje, szukając nayprzod trzeciej ciągle proporcjonalney, do boku Sześcianu pierwszego, i do boku Sześcianu drugiego; a potym do tychże dwóch boków, i do trzeciej proporc-



porcyonalney znalezionej , szukając czwartey.

Gdyby tedy bok drugiego Sześcianu był dwa razy nap: większy od boku Sześcianu pierwszego, ta czwarta ciągle proporcjonalna, byłaby ośm razy większa od boku Sześcianu pierwszego, a zatem i Sześcian drugi byłby ośm razy większy od Sześcianu pierwszego.

2. Niech będą dwa Równoległościanny prostopadłe podobne.

Gdy krawędź iedną, iednego z tych Równoległościannów, iest nap: dwa razy większa, od krawędzi iedney drugiego Równoległościannu; wszystkie też inne krawędzie pierwszego Równoległościannu, będą dwa razy większe od krawędzi drugiego. Powierzchnia więc podstawy pierwszego Równoległościannu, będzie cztery razy większa, niż powierzchnia podstawy drugiego. Aże też i wysokość pierwszego, dwa razy iest większa od wysokości drugiego; więc bryłowatość pierwszego iest ośm razy większa od bryłowatości drugiego. To rozumowanie przytłofować można do wszystkich innych liczebnych przykładów podobnych przytoczonemu.

W ogul-

W ogulności zaś mowiąc: niech będą trzy krawędzie:  $A, B, C$ , jednego Równoległościannu prostokątnego; a zaś:  $a, b, c$ , krawędzie drugiego Równoległościannu, pierwżemu podobnego; będą te trzy stosunki równe;  $A : a = B : b = C : c$ . Liniom  $A, i a$ , znajdziemy dwie linie  $L, i M$ , ciągle proporecyonalne; tak aby było  $A : a = L : M$ ,

Będzie pierwszy Równoległościann do drugiego, iak  $A$  do  $M$ .

Jakoż uważając linie  $A$  i  $a$ ,  $B$ , i  $b$ , iak bok podług, tych dwóch Równoległościannów, zamieńmy Prostokąt z linii  $a$ , i  $b$ , na inny, któryby miał za bok ieden, linią  $B$ , a za bok drugi, tę linią, która wypadnie z proporecy  $B : b = a : x$ . Ze zaś stosunek linii  $B$  do  $b$ , wzięty jest za równy stosunkowi linii  $A$  do  $a$ , więc też będzie  $A : a = a : x$ ; a zatym ta czwarta proporecyonalna, której szukamy, będzie w tancy rzeczy trzecią proporecyonalną do  $A$ , i  $a$ . Nazwiemy tę trzecią proporecyonalną;  $L$ . Będzie podług drugiego Równoległościannu, równa Prostokątowi z  $B$  przez  $L$ ; i ten drugi Równoległościann, będzie równy Równoległościannowi, któryby miał trzy linie  $B, c, L$ , za krawędzie; a zatym stosunek iego do

P

pier-

pierwszego Równoległościannu, będzie ten sam, co i stosunek Prostokąta z linii  $c$ , i  $L$ , do Prostokąta z linii  $A$ , i  $C$ .

Zamieńmy Prostokąt z linii  $c$  i  $L$ , na inny, któryby miał za bok jeden linią  $C$ , a za bok drugi linią, która wypadnie z proporcji  $C : c = L : x$ . Ze zaś stosunek linii  $C$  do  $c$ , wzięty jest za równy stosunkowi  $A$  do  $a$ , a stosunek  $A$  do  $a$ , zrobiliśmy równy stosunkowi  $x$  do  $L$ , więc też będzie  $a : L = L : x$ ; a zatem ta czwarta proporcjonalna, której szukamy będzie w samej rzeczy trzecią proporcjonalną do  $a$ , i  $L$ . Nazwiemy tę trzecią proporcjonalną:  $M$ ; Prostokąty:  $C \times M$  i  $c \times L$  będą równe, Aże się do wiodło iż pierwszy Równoległoscian jest do drugiego w stosunku Prostokąta  $A \times C$  do Prostokąta  $c \times L$ ; więc też ten pierwszy Równoległoscian będzie do drugiego w stosunku Prostokąta  $A \times C$  do Prostokąta  $C \times M$ , to jest w stosunku  $A$  do  $M$ .

Ze zaś jest  $A : a = a : L = L : M$ ; więc stosunek pierwszego Równoległoscianu do drugiego, równa się stosunkowi linii pierwszej do czwartej, ciągle proporcjonalnej; która to pierwsza linia

Kuzą.

będzie  
z linii

L, na  
linią C,  
ednie z  
osunek

ny sto-  
a, zro-  
., więc  
tym ta  
izuka-  
ią pro-

ę trze-  
okaty:  
e się do  
ian jest  
A  $\propto$  C

n pier-  
to dru-  
 $\propto$  C do  
osunku

; więc  
legło-  
unkowi  
to pro-  
a linia  
użją-

służąca za pierwszy wyraz proporcji,  
powinna być krawędziem jednego z tych  
Równoległoscianów, drugim zaś teyże  
proporcji wyrazem, ma być krawędź  
drugiego Równoległoscianu, pierwsze-  
mu odpowiadający; tak iak jest nap: kra-  
wędź A, i a.

Ale że też i dwa Sześciiany mające kra-  
wędzie A, i a, w tymże samym byłyby  
stosunku, więc dwa Równoległosciany  
podobne, mają się do siebie w stosunku  
sześciennym ich krawędzi.

163. *Twierdź: przybrana.* Wyfokości  
Graniałostupów podobnych, lub Ostro-  
granów podobnych, tak się mają do sie-  
bie, iak ich krawędzie odpowiadające so-  
bie.

*Domodź:* Dwóch ścian odpowiadają-  
cych sobie w dwóch Graniałostupach  
podobnych, pochyłości do podstaw są  
równe; tychże ścian wyfokości, tak  
się mają do siebie, iak boki, służące  
im za podstawy. Wyfokości tych Gra-  
niałostupów, równe są prostopadłym  
spuszczonym na ich podstawy od pun-  
któw którychkolwiek na podstawach  
przeciwnych, (nap: od punktów na bo-  
kach odpowiadających sobie w tychże pod-

stawach; a zatem te wysokości Grania-  
stołupów, będą służyć za jedno ramie  
kąta prostego, w dwóch Trójkątach po-  
dobnych, które za przeciwprostokątne,  
mają wysokości dwóch ścian odpowia-  
dających sobie. Będą zatem te wyso-  
kości dwóch Graniastołupów, tak się  
mieć do siebie, jak wysokości dwóch ich  
ścian odpowiadających sobie; to jest: jak  
krawędzie dwóch tychże Graniastołu-  
pów, odpowiadające sobie. To samo ro-  
zumowanie przyłożyć można i do  
Ostrogránów,

3. Niech będą dwa jakiekolwiek Gra-  
niastołupy podobne, i te także są do sie-  
bie w stosunku sześciennym, ich krawę-  
dź odpowiadających sobie.

Rozumowanie Arytmetyczne, któreby  
mogło służyć za wstęp do ogólnego do-  
wodzenia, to samo jest, co i poprzedza-  
jące.

Wystawiając sobie podstawy tych  
dwóch Graniastołupów, zamienione na  
dwa kwadraty równe in. co do powierzch-  
ni; ponieważ powierzchnie tych dwóch  
podstaw, mają się do siebie, jak kwadraty  
boków ich, odpowiadających sobie; więc  
też



też i powierzchnie kwadratów równych tym podstawom; mieć się do siebie będą, jak kwadraty boków odpowiadających sobie, w tychże podstawach; a zatem i stosunek boków. tych dwóch kwadratów; równy będzie stosunkowi boków odpowiadających sobie w podstawach, dwóch Graniałostupów. Aże ten ostatni stosunek, równa się stosunkowi wysokości dwóch Graniałostupów; więc Równoległościanny mające za podstawy kwadraty, równe podstawom Graniałostupów, i wysokości równe wysokościom Graniałostupów, byłyby do siebie podobne; a zatem te dwa Równoległościanny, takby się do siebie miały, jak Sześciąny ich krawędzi, albo jak Sześciąny krawędzi odpowiadających sobie w Graniałostupach. Ze zaś te Równoległościanny, byłyby równe względem Graniałostupów, więc też i dwa Graniałostupy podobne, mają się do siebie, jak Sześciąny krawędzi ich, odpowiadających sobie.

4. Niech będą dwa jakiekolwiek Ostrograny podobne, stosunek ich równa się stosunkowi Sześciątów krawędzi ich, odpowiadających sobie.

Dwa

Dwa Graniałostłupy nap: proste, których podstawy i wysokości byłyby równe względem podstawy i wysokości, tych Ostrogranów; te mówię Graniałostłupy miałyby wysokości proporcjonalne bokom pośraw swoich; byłyby więc podobne; a zatem tak by się do siebie miały, iak Sześciiany ich krawędzi. Aże byłyby trzy razy większe względem tych dwóch Ostrogranów, więc i te Ostrograny są do siebie w stosunku Sześciennym ich krawędzi:

5. Wszystkie Bryły podobne, zakończone powierzchniami płaskimi, mają się do siebie iak Sześciiany, ich krawędzi.

Dwie Bryły podobne, można rozłożyć na takie Ostrograny, z których każdy w szczególności należący do jednej Bryły, podobny będzie drugiemu należącemu do drugiej Bryły. Te Ostrograny jedne względem drugich pojedynczobrane, mieć się do siebie będą w stosunku sześciennym ich krawędzi, odpowiadających sobie; więc i summa wszystkich Ostrogranów, z których się składa jedna Bryła, będzie do summy wszystkich Ostrogranów, z których się składa dru-

ga

ga Bryła, w tymże samym stosunku, to jest w stosunku sześciennym, ich krawędzi, odpowiadających sobie.

164. *Defin:* Walce proste podobne do siebie są te, których stosunek wysokości, równa się stosunkowi promieni, ich podstaw; przecięcia zatem tych Walców przez osi przechodzące, są podobne, a ząd podobne są i Prostokąty tworzące obrotem swoim te Walce.

Co zaś do Walców pochyłych, a do siebie podobnych; oprócz tego, że wysokości ich mieć się powinny do siebie, iak promienie ich podstaw, przecięcia też ich od płaszczyzny przechodzącej przez ich osi prostopadłe do podstawy, powinny być do siebie podobne, to jest ich osi powinny się mieć do siebie, iak promienie ich podstaw;

165. *Twierdz. 4.* Powierzchnie Walców prostych podobnych, mają się do siebie, iak kwadraty ich *Wymiarów* (Dimensio) odpowiadających sobie; to jest: iak kwadraty promieni, ich podstaw, albo iak kwadraty ich wysokości.

Powierzchnia każdego z tych Walców równa się Prostokątowi z okręgu podstawy

wy tego, i z summy wysokości tego, i promienia podstawy; więc powierzchnie te, tak się mieć do siebie będą, iak Prostokąty z promieni ich podstaw, i z summy tychże promieni i wysokości Walców. A że promienie podstaw, są do siebie (dla podobieństwa Walców) iak ich wysokości, więc i summa z tych promieni jest do summy z tych wysokości, w tym stosunku, w którym są te promienie. Prostokąty więc, w których stosunku mają się do siebie powierzchnie te Walców, są podobne, a przeto tak się będą do siebie miały, iak kwadraty ich boków, odpowiadających sobie, nap: iak kwadraty promieni ich podstaw. Będą więc do siebie i powierzchnie Walców w tymże samym stosunku; to jest, iak kwadraty promieni, ich podstaw.

Toż mówić i o powierzchniach krzywych w Walcach; to jest, o takich, w których się nie zamykają podstawy.

166. *Twierdź: 5.* Bryłowości Walców podobnych, tak się mają do siebie, iak Szóstiany ich wymiarów odpowiadających sobie; to jest, są do siebie w stosunku trójmnożnym tychże wymiarów, nap: w stosunku trójmnożnym promieni, ich podstaw.

*Dowodź:*

*Dowódz:* Opiszmy na podstawach, tych Walców, iakiekolwiek Wielokąty foremne, podobne; niech te Wielokąty będą podstawami Graniałtosłupów, teyż z Walcami wyfokości. Te Graniałtosłupy będą podobne, a zatym będą się miały do siebie w stosunku tróymnożnym, nap: promieni ich podstaw.

Walcè tak się do siebie mają, iak Graniałtosłupy na nich opisané. Jakoż każdy Walec iest do Graniałtosłupa na nim opisanego, w stosunku podstawy tego Walca do podstawy Graniałtosłupa. Aże podobne są dwa Wielokąty na podstawach Walców opisané, więc tenże sam stosunek będzie każdego Walca do Graniałtosłupa na nim opisanego; a zatym tak się mieć będzie ieden Walec, do Graniałtosłupa na nim opisanego, iak i Walec drugi do Graniałtosłupa na nim także opisanego, tak więc pierwszy Walec będzie się miał do drugiego, iak i pierwszy Graniałtosłup do drugiego.

Aże stosunek tych Graniałtosłupów równa się stosunkowi tróymnożnemu promieni podstaw Walców, na których są te Graniałtosłupy opisané; więc i stosunek



funek tych Walców równać się także będzie stoſunkowi tróymnożnemu promieni tychże podſtaw.

167. Można objaſnić przykładami li-  
czebnemi to Twierdzenie; ma zaś być  
nayprzod przyſtoſowane do ſamych  
Walców proſtych, z kąd łatwo wnieſić  
będzie można, że i w ukośnych Wal-  
cach, ten ſam ſtoſunek ma mieyſce; po-  
nieważ Walce ukośne, równey podſta-  
wy i wyſkości z Walcami proſtemi,  
byłyby im równe, a zatem byłyby też  
do ſiebie w ſtoſunku tróymnożnym pro-  
mieni podſtaw ſwoich.

168. *Defin.* Oſtrokregi proſte nazy-  
wają ſię podobnymi, gdy tak ſię mają do  
ſiebie ich wyſkości, iak i promienie ich  
podſtaw. Przecięcia przechodzące przez  
oś tych Oſtrokregów ſą podobne, a zatem  
podobne ſą Tróykąty, tworzące obrotem  
ſwoim te Oſtrokregi.

Co zaś do Oſtrokregów ukośnych:  
tych nie tylko wyſkości tak ſię mają do  
ſiebie powinny, iak promienie ich pod-  
ſtaw, ale nadto i oſi ich w tymże ſamym  
do ſiebie ſą ſtoſunku.

169. *Twierdź*: 6. Powierzchnie całe Ostrokęgów prostych, są do siebie w stosunku dwumnożnym promieni podstaw, albo w stosunku dwumnożnym boków tychże Ostrokęgów.

*Dowodzenie* tego, może być podobne do dowodzenia Twierdzenia 4. względem stosunku powierzchni Walców podobnych.

Może też być i w sposób następujący, który także służyłby mógł również i do Walców:

W jednym którymkolwiek Ostrokęgu, powierzchnia krzywa, tak się ma do powierzchni podstawy, jak bok Ostrokęgu, do promienia tej podstawy. A że i w drugim Ostrokęgu podobnym, pierwszemu tenże sam stosunek mamyśmy; więc powierzchnia krzywa jednego Ostrokęgu, tak się ma do powierzchni podstawy jego, jak powierzchnia krzywa drugiego Ostrokęgu podobnego, do powierzchni jego podstawy: więc i summa z powierzchni krzywej i z powierzchni podstawy jednego Ostrokęgu, to jest cała jego powierzchnia tak się ma do powierzchni podstawy jego, jak cała powierzchnia drugiego Ostrokęgu, do powierzchni jego

iego podstawy; a zatym cała powierzchnia pierwszego Ostrokregu, tak nie ma do całej powierzchni drugiego, jak powierzchnia podstawy pierwszego Ostrokregu, do powierzchni drugiego; albo jak kwadrat promienia pierwszej podstawy, do kwadratu promienia drugiej.

Podobnie dowieść można, że i powierzchnie krzywe Ostrokregów podobnych, są w stosunku dwumnożnym promieni podstaw, tych Ostrokregów lub ich boków odpowiadających sobie.

**170. Twierdz, 7.** Bryłowości Ostrokregów podobnych, mają się do siebie, jak Sześciiany ich wymiarów odpowiadających sobie; to jest: jak Sześciiany promieni ich podstaw, albo jak Sześciiany ich boków, i t. d.

Twierdzenie to podobnie się dowodzi, jak i poprzedzające, względem bryłowości Walców; kładąc zamiast Granastosłupów na Walcach opisanych, Ostrograny opisane na Ostrokregach.

**171. Uwaga.** Wszvstko to, cokolwiek się powiedziało o stosunku bryłowości

Równo-

Równoległościąnów, Graniałstosłupow,  
Ośtrogránów, i Ośtrokrégów podobnych,  
na to wypada, że:

W ogulności mówiąc, te Bryły są w  
stosunku złożonym z stosunku ich pod-  
staw, i z stosunku ich wysokości.

Ze zaś, gdy te Bryły są podobne, stosu-  
nek ich podstaw, iest dwumnożnym sto-  
sunku ich wysokości, więc stosunek zło-  
żony z stosunku ich podstaw, i z stosun-  
ku ich wysokości, składa się z stosunku  
dwumnożnego, i z stosunku pojedyn-  
czego ich wysokości; będzie tedy taki  
stosunek trójmnożnym stosunku ich wy-  
sokości. A że stosunek ich wysokości  
równa się stosunkowi ich boków których-  
kolwiek odpowiadających sobie, więc  
stosunek tych Brył, gdy do siebie są po-  
dobne, iest też stosunkiem trójmnożnym  
boków ich którychkolwiek odpowida-  
jących sobie.

172. *Twierdz. 8.* Powierzchnie kul,  
są do siebie w stosunku dwumnożnym  
ich promieni, to iest: iak kwadraty ich  
promieni. Bryłowatości zaś kul, są do  
siebie w stosunku trójmnożnym ich pro-  
mieni, to iest, iak sześciany tychże pro-  
mieni.

*Dowódz.*

*Dowódz.* Powierzchnie kul, są cztery razy większe, niżeli powierzchnie ich kół wielkich; a zatem, tak się do siebie mają, iak powierzchnie tychże kół, to jest: iak kwadraty ich promieni.

Bryłowości kul, są 3; wzg'ędem Walców na nich opisanych; więc tak się mają do siebie, iak bryłowości tych Walców, to jest iak Sześciany ich promieni.

173, *Uwaga.* Widzieliśmy w szczególności, iż powierzchnia kuli, jest do powierzchni kwadratu iey średnicy, w stosunku okręgu koła do iego średnicy, i ten stosunek jest zawsze jednakowy. Widzieliśmy też, że bryłowość kuli, jest do bryłowości Sześcianu iey średnicy, iak okrąg koła, do średnicy iego, 6 razy wziętej; który także stosunek nigdy się nieodmienia.

Kule więc zachowują własności Brył podobnych, tak w stosunku ich powierzchni, iako i w stosunku ich bryłowości. Jakoż, są one w samej rzeczy Bryłami podobnemi; środek jedney kuli podobnie jest położony, iak i środek inney iakieykolwiek kuli; tak jedna iak i druga, tworzy się obrotem półkola, a te półkola są do siebie podobne.

Mozna-



Możnaby więc (z niewielką odmianą) to im przyśtoſować, co ſię powiedziało o Bryłach podobnych, zakończonych powierzchniami płaskimi, względem punktów podobnie połoſzonych w tychże Bryłach.

174. *Defn:* Wycinki podobne kul, ſą te, których kąty w ſrodku, ſą podobne, albo które obrotem podobnych wycinków kół tworzą ſię.

Odcinki kul, podobne, ſą te, których promienie podług, tak ſię do ſiebie mają, jak ich wyſokoſci, albo jak promienie kul, do których należą; albo na koniec ſą te, które ſię tworzą podobnych połów odcinków kół obrotem.

175. *Twierdz: 9.* Powierzchnie kuliſte, i powierzchnie całe, tak wycinków, jak i odcinków podobnych w kulach, ſą do ſiebie w ſroſunku dwumnoſnym promieni kul, do których należą.

*Dowodz:* Niech będą: ACB. aeb, dwa *Tab. VI* wycinki, kół podobne, które obrotem *Fig. 4* ſwoim, około promieni: AC, ac, tworzą podobne kul wycinki.

Nayprzod

*Nayprzod* Powierzchnie kuliste utworzone przez łuki:  $AB, ab$ , równać się będą powierzchniom kół mających za promienie, linie:  $AB, ab$ ; więc tak się mieć będą do siebie, iak kwadraty tych linii:  $AB, ab$ , albo iak kwadraty promieni:  $AC, ac$ .

*Powtorz.* Powierzchnie Ostrokątowe utworzone obrotem promieni:  $CB, bc$ , mają się też do siebie, iak kwadraty promieni:  $CB, cb$ , albo  $CA, ca$ ; Więc i powierzchnie całe wycinków podobnych tak się do siebie mają, iak kwadraty promieni  $CA, ca$ .

Koła wykreślone promieniami  $BD, bd$ , i służące za podstawy odcinkom kul, utworzonym przez obrot połudczków kół;  $ABD, abd$ , są także do siebie, iak kwadraty linii  $BD, bd$ , a zatem iak kwadraty promieni:  $CB, cb$ , albo  $CA, ca$ .

176. *Twierdż:* 10. Bryłowości tak wycinków, iak i odcinków podobnych, w kulach, są do siebie w stosunku trójmnożnym promieni kul, do których należą.

*Dowodz.* *Nayprzod:* Wycinek kuli, utworzony przez wycinek  $ACB$ , koła  
tak

tak się ma do swoiey kuli, iak kwadrat linii  $AB$ , do kwadratu średnicy  $AE$ , albo iak kwadrat linii  $ab$ , do kwadratu średnicy  $ae$ ; to iest: iak wycinek kuli, utworzony przez wycinek:  $acb$ , koła, do kuli swoiey. Więc tenże sam iest stosunek jednego z tych wycinka do swoiey kuli, co i drugiego wycinka do swoiey także kuli; azatym te wycinki, tak się do siebie mają, iak i kule do których należą. Aże stosunek tych kul, iest stosunkiem trójmnożnym ich promieni, więc i stosunek tych wycinków iest także stosunkiem trójmnożnym tychże promieni.

*Powtore.* Ostrokreśli podobne utworzone obrotem Trójkątów,  $CBD$ ,  $cbd$ , są do siebie w stosunku trójmnożnym promieni  $CB$ ,  $cb$ ; więc tak też mają się do siebie, iak i wycinki kul utworzone obrotem wycinków  $ACB$ ,  $acb$ , do kół należących; a zatym i różnice każdego wycinka kuli, od każdego Ostrokreśli, to iest odcinki kul, utworzone przez pŁódceinki kół,  $ABD$ ,  $abd$ , są do siebie w stosunku równym stosunkowi wycinków kul, to iest w stosunku trójmnożnym promieni:  $CB$ ,  $cb$ .

**177. Twierdź: II.** Gdy cztery takie linie czytają proporcją, i gdy dwa pierwsze wyrazy tej proporcji, są liniami odpowiadającemi sobie, czyli podobnie położonemi, w dwóch Bryłach podobnych; a dwa ostatnie wyrazy tejże proporcji, są liniami odpowiadającemi sobie, w dwóch innych Bryłach podobnych; stosunek dwóch pierwszych Brył, będzie równy stosunkowi dwóch brył drugich.

*Dowódz.* Gdyby te cztery linie były bokami czterech Sześcianów, te cztery Sześciany, czyniłyby proporcją; ale stosunek dwóch pierwszych Brył, równa się stosunkowi dwóch pierwszych Sześcianów, a stosunek dwóch drugich Brył, równa się stosunkowi dwóch drugich Sześcianów; więc i stosunek dwóch pierwszych Brył, równa się stosunkowi dwóch Brył drugich.

**178. Uwaga.** Bryłowatości Brył podobnych, prędzey rosną, niż ich powierzchnie.

*Przykład.* Niech będą linie odpowiadające sobie w dwóch Bryłach podobnych, dwa razy większe jedne względem

dem drugich; powierzchnia jednej z tych Brył, będzie cztery razy większa od powierzchni drugiej Bryły; a zaś Bryłowatość jednej Bryły, będzie ośm razy większa od bryłowatości, drugiej Bryły.

W ogulności zaś mówiąc, niech będą *Tab. VI.*  
AB, AC, liniami odpowiadającemi sobie, *Fig. 5.*  
w dwóch Bryłach podobnych. Zróbmy Trójkąt prostokątny mający linią AB, za jedno ramie kąta prostego, a linią AC, za przeciwprostokątną.

Pociągniemy CD prostopadłą do AC, i natrafiającą na linią AB przedłużoną, w punkcie D. Od tego punktu D, wyprowadźmy DE prostopadłą do AB, i natrafiającą na linią AC przedłużoną, w punkcie E.

Powierzchnie dwóch Brył, któreby miały AB, i AC za linie odpowiadające sobie, mają się tak do siebie, jak linie AB, i AD; a bryłowatości ich, są w tym samym stosunku, w którym linie AB, i AE.

Aż linia AE, większa jest względem linii AB, niżeli linia AD; więc też bryłowatość



łowatość drugiey Bryły większa jest względem bryłowości pierwejey Bryły, niżeli powierzchnia tey drugiey Bryły, względem powierzchni pierwejey Bryły; to jest: bryłowość drugiey Bryły prędzey się powiększa, niżeli iey powierzchnia.

179. *Uwaga.* Na poprzedzających Twierdzeniach załada się podział *Linii Brył* (*Linea Solidorum*) który znajduje się na cerklu proporcjonalnym.

Ta linia zawiera w sobie zwyczajnie 64, podziałów, które się rachować zaczynają od *środku* narzędzia (*à centro*).

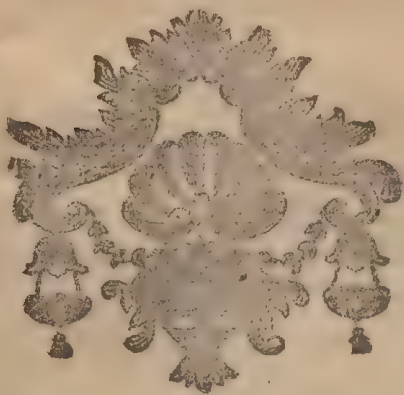
Odległości tego *środku* od punktów oznaczonych liczbami: 1, 8, 27, 64, tak się mają do siebie, iak

liczby 1, 2, 3, 4; co znaczy, że Bryły podobne, których boki są w stosunku liczb: 1, 2, 3, 4, mają bryłowości w stosunku liczb: 1, 8, 27, 64.

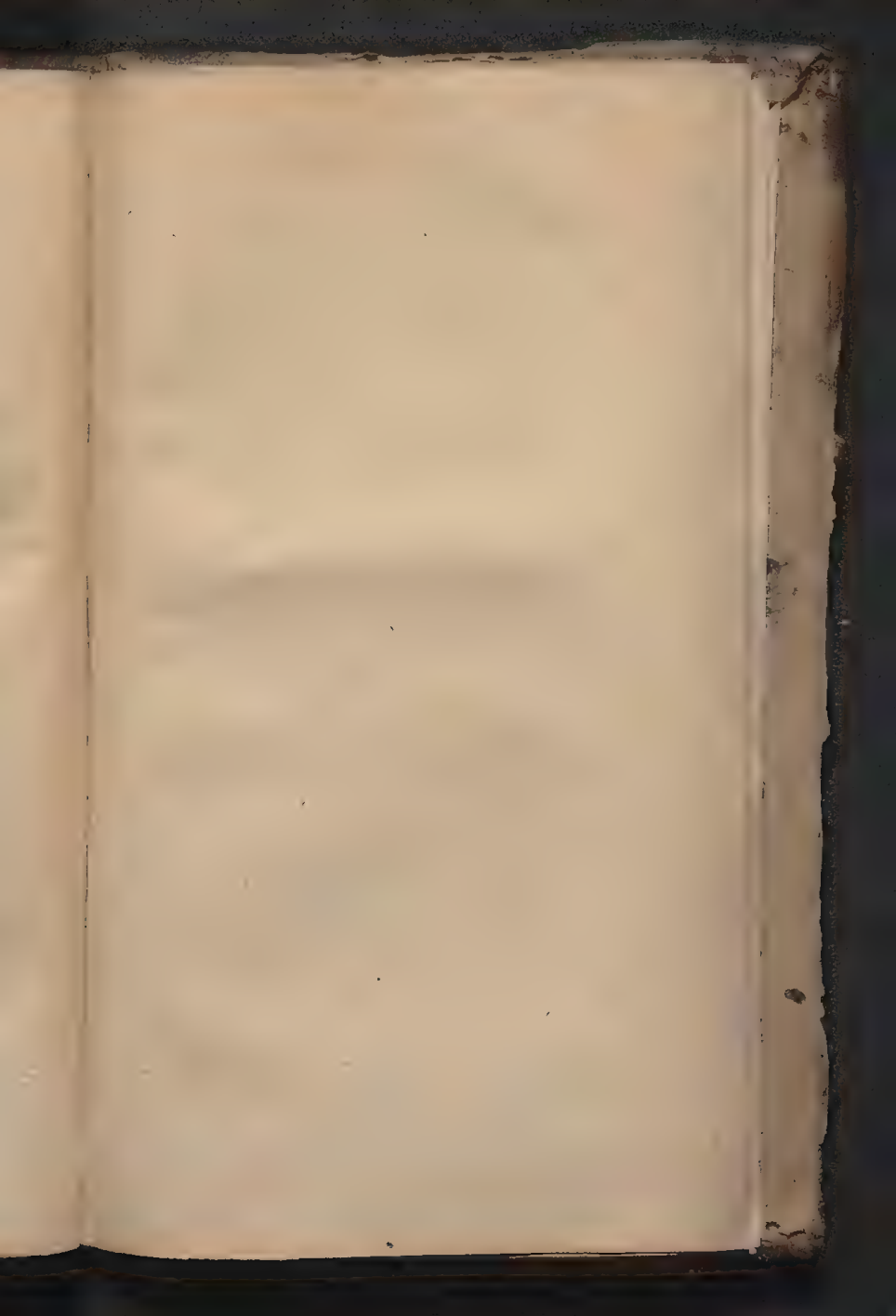
Inne podziały wyznaczone są przez wyciągnięcie przybliżone pierwiastków sześciennych. I tak, ponieważ boki dwóch

dwóch Sześciątów, z których jeden dwa razy jest większy od drugiego, tak się blisko mają do siebie, jak liczby 126 i 100; więc też i odległości środka, od punktów naznaczonych na tej linii liczbami: 1, 2, tak się mają do siebie, jak liczby: 100, i 126. Używanie dwóch takich linii, znajdujących się na dwóch ramionach cerkła proporcjonalnego, podobne jest używaniu innych linii także się znajdujących, które w osobnym na to Rozdziale już się wyłożyło. w Części I.

K O N I E C.

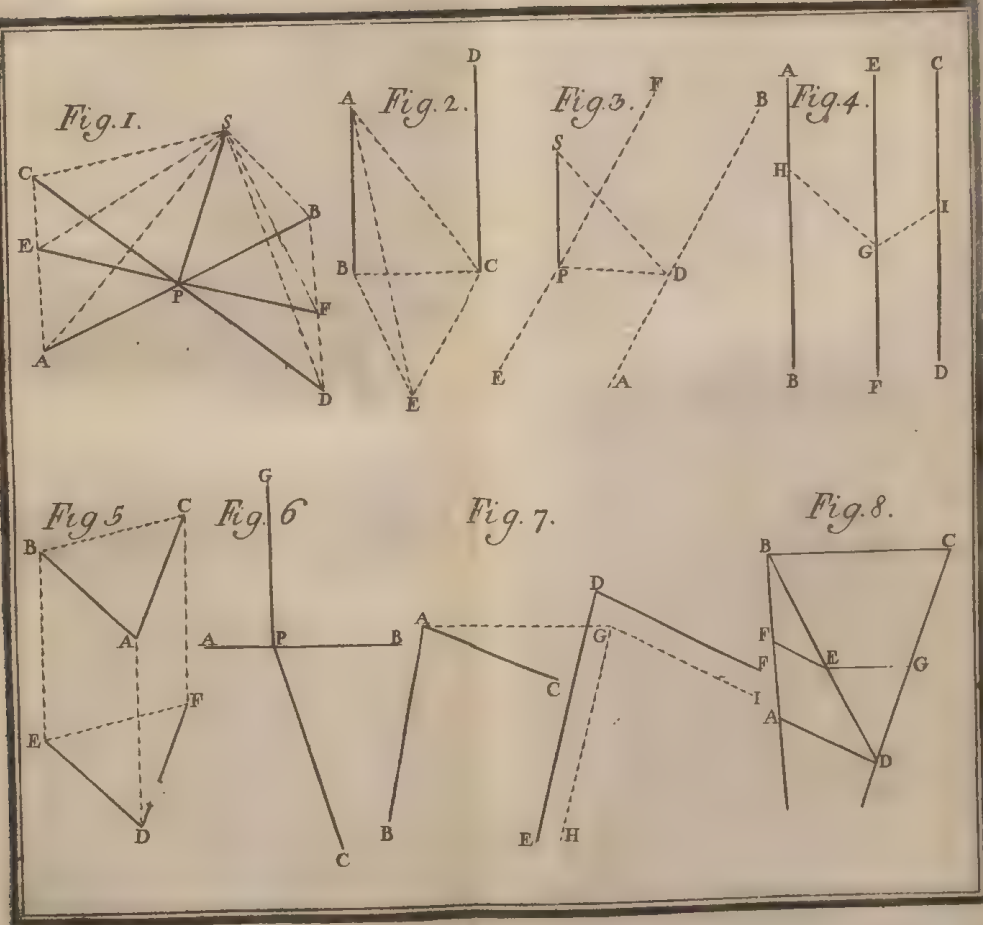




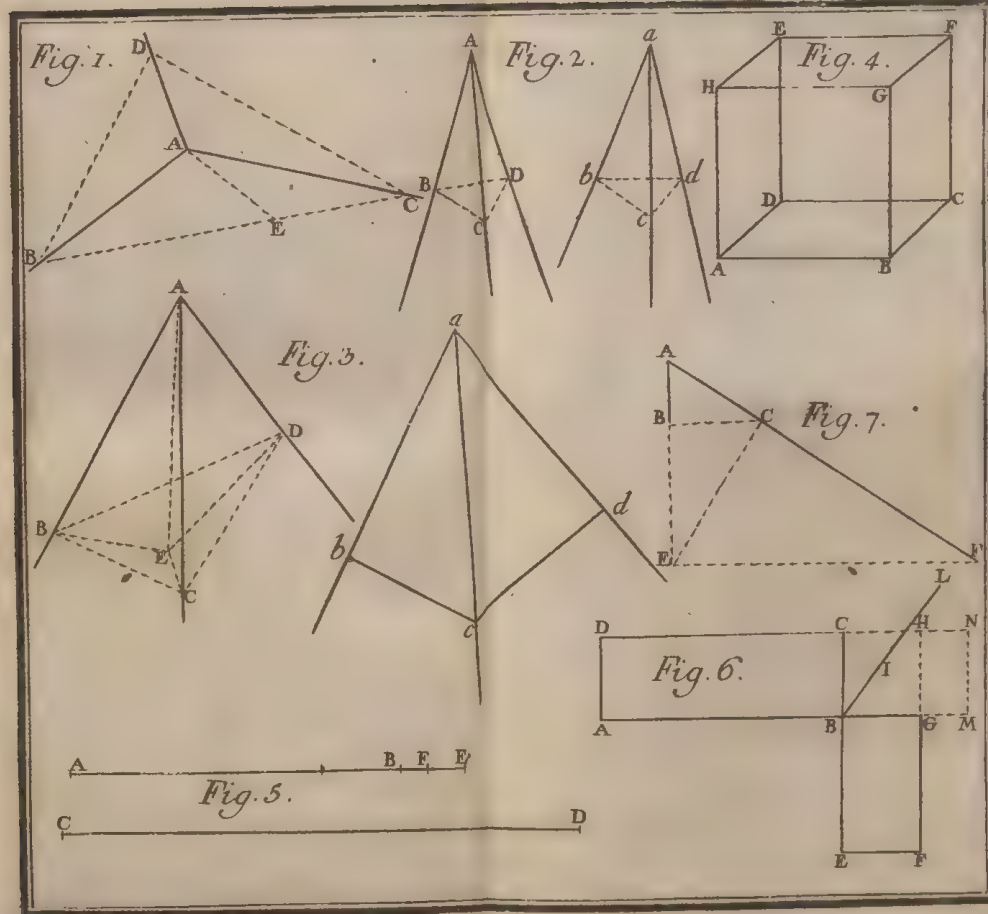


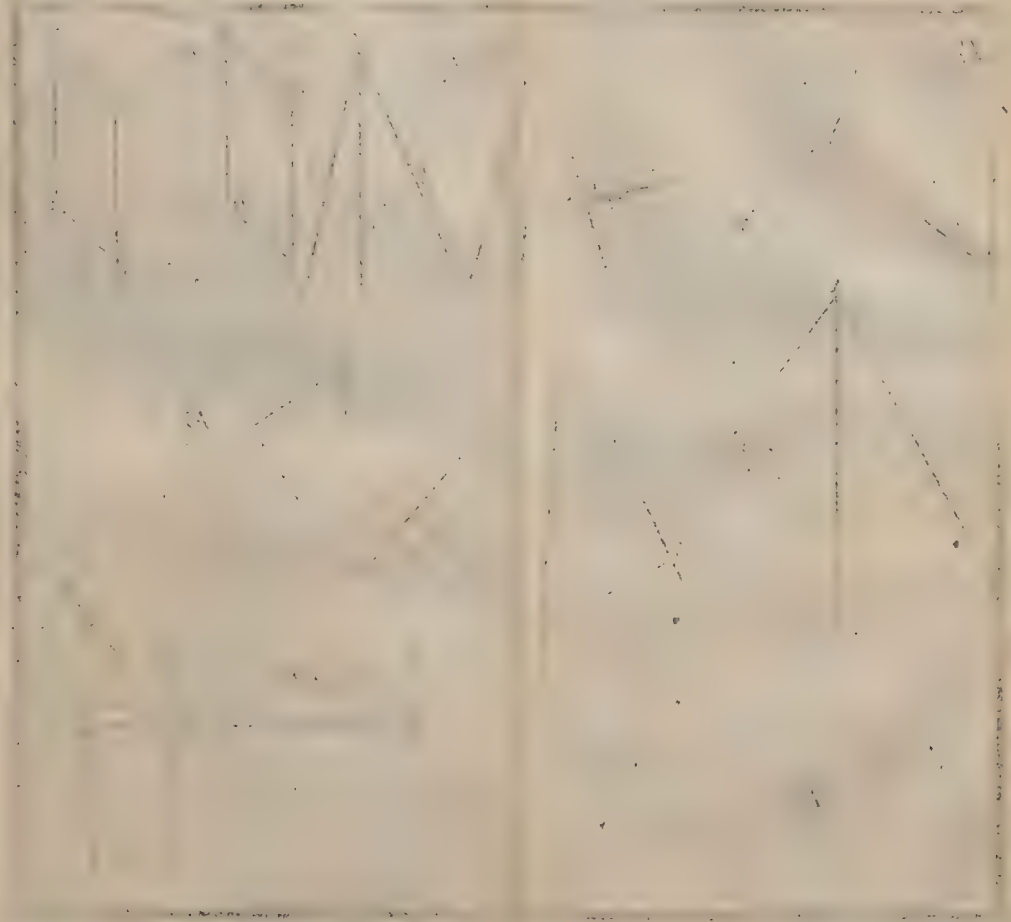


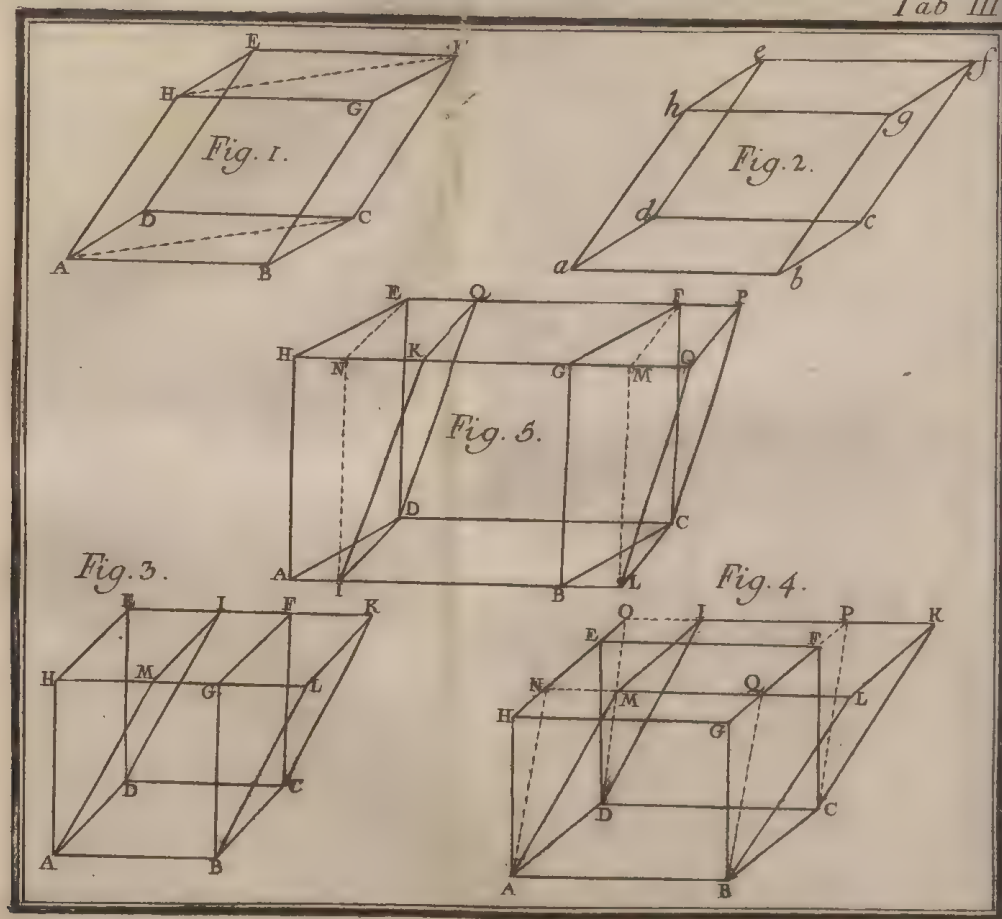




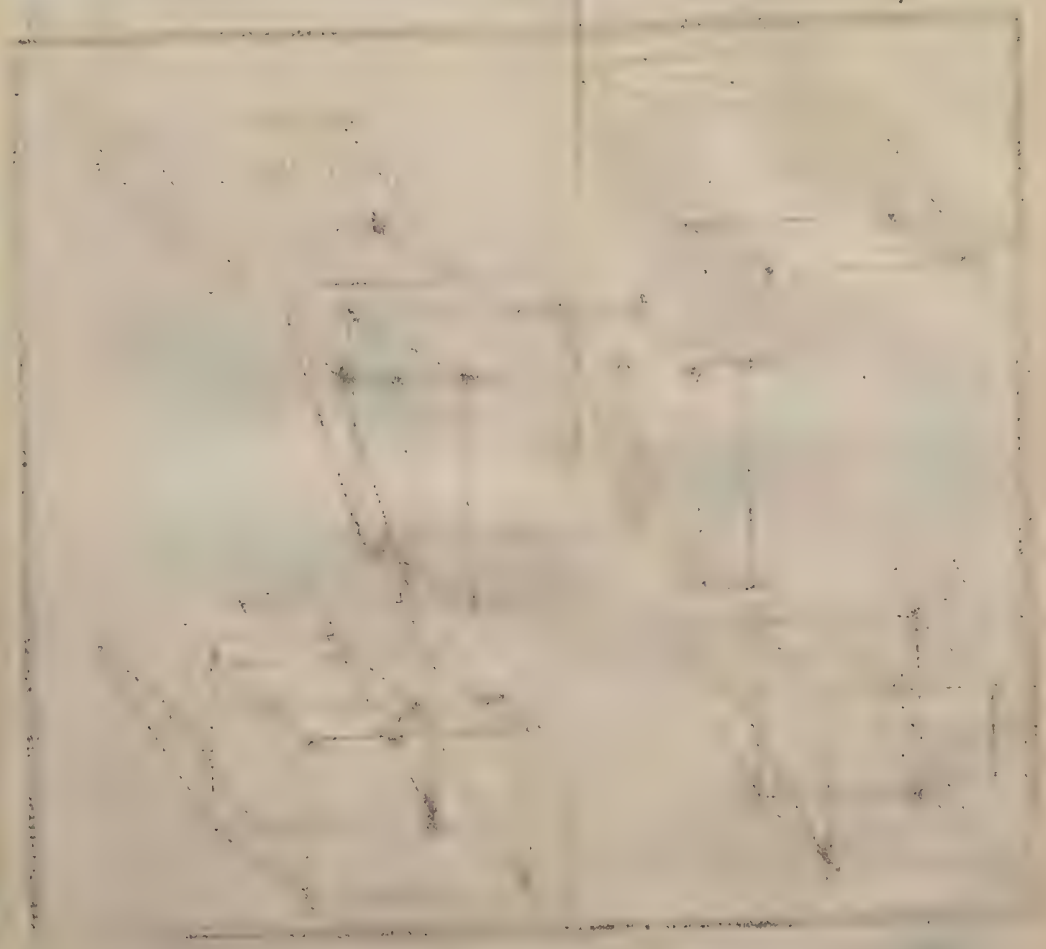


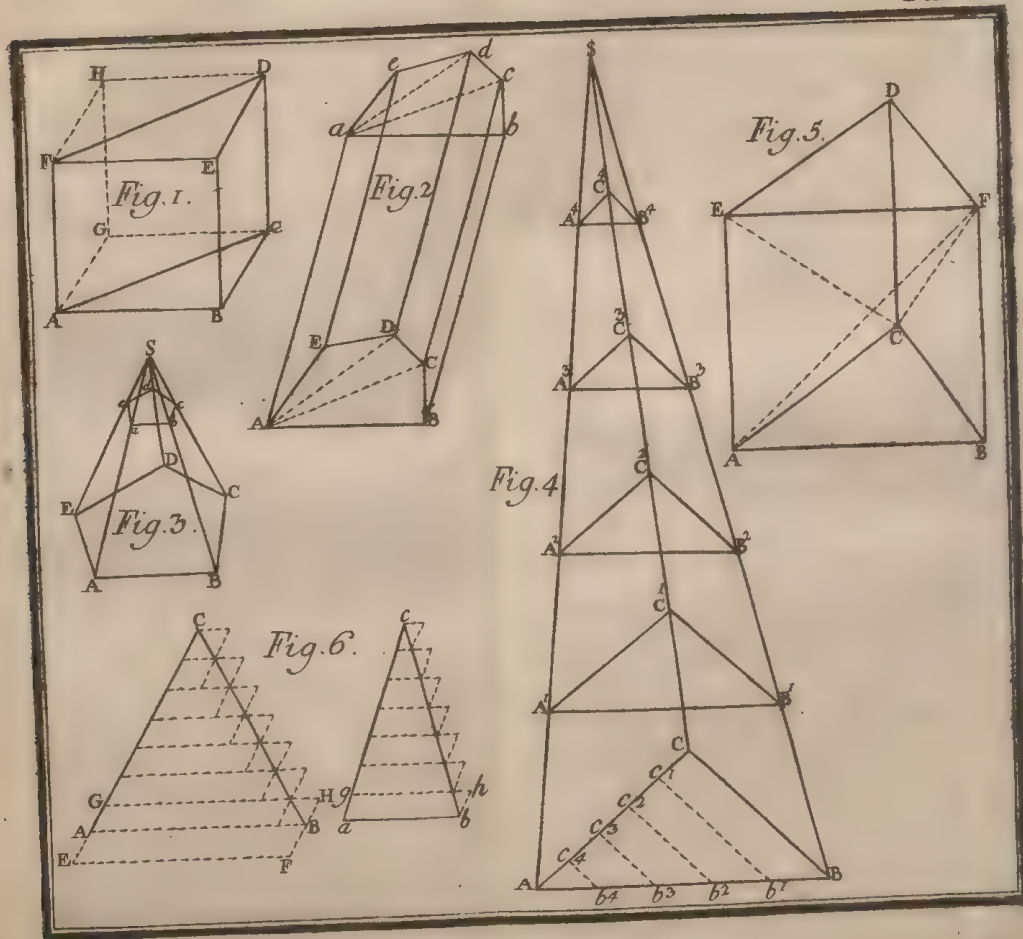




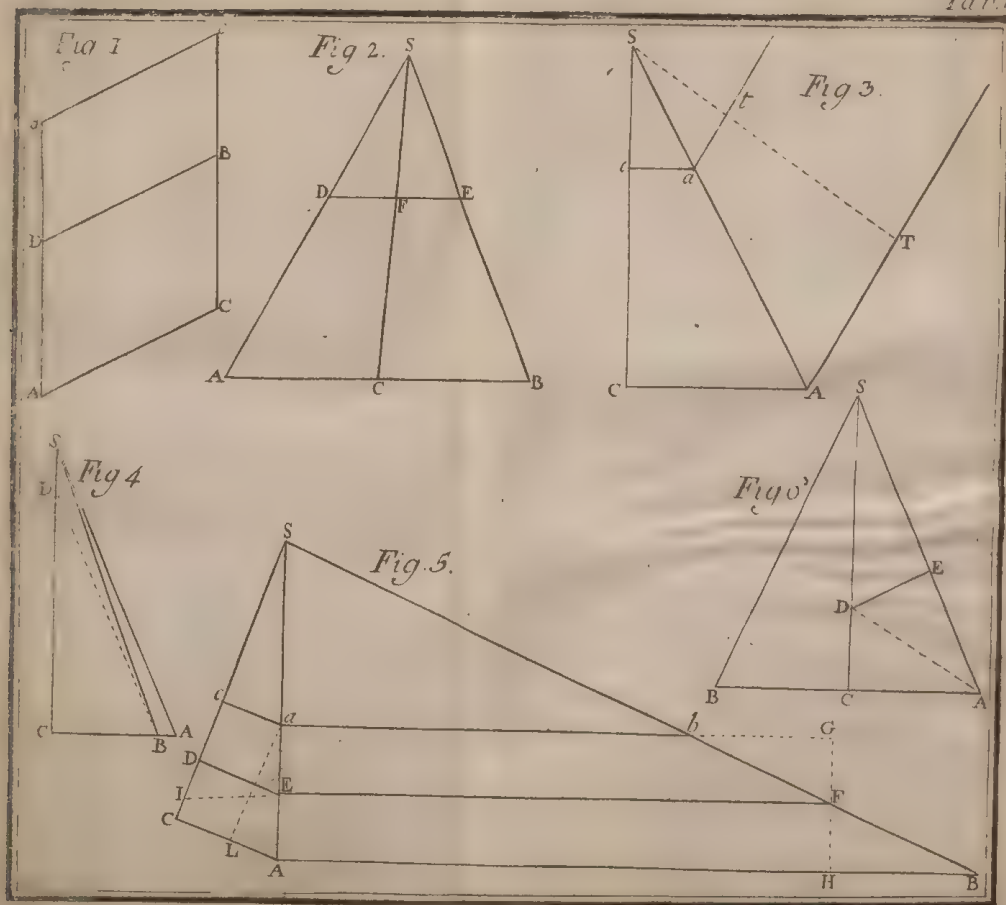






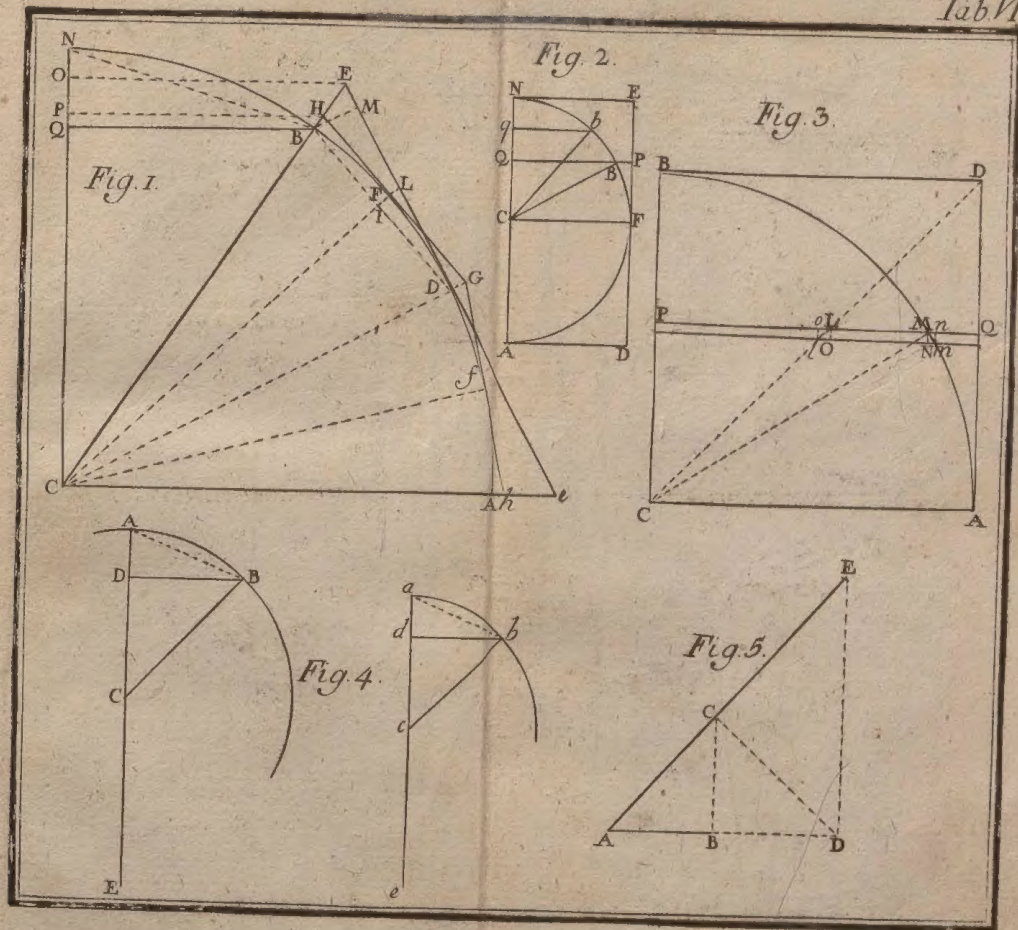


















Biblioteka Jagiellońska



stdr0026398

